GIẢI TÍCH CƠ SỞ
(ÔN THI THẠC SĨ TOÁN HỌC)
KHÔNG GIAN ĐỊNH CHUẨN
KHÔNG GIAN HILBERT

PGS TS Nguyễn Bích Huy

Ngày 4 tháng 2 năm 2014

I. Phần lý thuyết

1 Tích vô hướng, không gian Hilbert

1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 1 1. Cho không gian vectơ X trên trường số K ($K=\mathbb{R}$ hoặc $K=\mathbb{C}$).Một ánh xạ từ $X\times X$ vào $K,(x,y)\to\langle x,y\rangle$ được gọi là một *tích vô hướng trên* X nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau:

(a) $\langle x,x\rangle\geq 0 \quad \forall x\in X$
$\langle x,x\rangle=0\Leftrightarrow x=\theta$

(b) $\langle y,x\rangle=\overline{\langle x,y\rangle}$ ($\langle y,x\rangle=\langle x,y\rangle$ nếu $K=\mathbb{R}$), $\forall x,y\in X$

(c) $\langle x+x',y\rangle=\langle x,y\rangle+\langle x',y\rangle \quad \forall x,x',y\in X$

(d) $\langle\lambda x,y\rangle=\lambda\langle x,y\rangle \quad \forall x,y\in X,\forall\lambda\in K$

Từ các tính chất i) - iv) ta cũng có:
$\langle x,y+y'\rangle=\langle x,y\rangle+\langle x,y'\rangle, \quad \langle x,\lambda y\rangle=\overline{\lambda}\langle x,y\rangle$

2. Nếu $\langle .,.\rangle$ là một tích vô hướng trên X thì ánh xạ $x\to\sqrt{\langle x,x\rangle}$ là một chuẩn trên X, gọi là *chuẩn sinh bởi tích vô hướng*.

3. Nếu $\langle .,. \rangle$ là tích vô hướng trên X thì cặp$(X, \langle .,. \rangle)$ gọi là một *không gian tiền Hilbert* (hay không gian Unita, không gian với tích vô hướng). Sự hội tụ, khái niệm tập mở,...,trong $(X, \langle .,. \rangle)$ luôn được gắn với chuẩn sinh bởi $\langle .,. \rangle$. Nếu không gian định chuẩn tương ứng đầy đủ thì ta nói $(X, \langle .,. \rangle)$ là không gian Hilbert.

1.2 Các tính chất

1. Bất đẳng thức Cauchy - Schwartz: $|\langle x, y \rangle| \le \|x\|.\|y\|$
2. $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (đẳng thức bình hành).
3. Nếu $\lim x_n = a, \lim y_n = b$ thì $\lim \langle x_n, y_n \rangle = \langle a, b \rangle$

Ví dụ 1

1. Trong $C[a,b]$ các hàm thực liên tục trên $[a,b]$ thì ánh xạ

$$(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle = \int_a^b x(t)y(t)dt$$

là một tích vô hướng. Không gian $(C[a,b], \langle .,. \rangle)$ không là không gian Hilbert.(xây dựng ví dụ tương tự ở phần không gian metric)

2. Trong l_2, với $x = \{\lambda_k\}, y = \{\alpha_k\}$, ta định nghĩa

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \alpha_k$$

thì $\langle .,. \rangle$ là tích vô hướng, $(l_2, \langle .,. \rangle)$ là không gian Hilbert.

2 Sự trực giao

2.1 Định nghĩa

Định nghĩa 2 Cho không gian với tích vô hướng $(X, \langle .,. \rangle)$ và $x, y \in X, \varnothing \neq M \subset X$.

1. Ta nói x trực giao với y (viết $x \perp y$) nếu $\langle x, y \rangle$
2. Nếu $x \perp y \quad \forall y \in M$ thì ta viết $x \perp M$. Ta ký hiệu

$$M^{\perp} = \{x \in X : x \perp M\}$$

.

2.2 Các tính chất

1. Nếu $x \perp M$ thì $x \perp \langle M\rangle(\langle M\rangle$ chỉ không gian con sinh bởi M)
2. Nếu $x \perp y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ và $\lim y_n = y$ thì $x \perp y$. Suy ra nếu $x \perp M$ thì cũng có $x \perp \overline{M}$.
3. $M^{\perp}$ là một không gian con đóng.
4. Nếu $x_1, \dots, x_n$ đôi nột trực giao thì

$$\|x_1 + \ldots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \ldots + \|x_n\|^2 \text{(đẳng thức Pythagore)}$$

Định lý 1 (về phân tích trực giao) Nếu M là một không gian con đóng của không gian Hilbert $(X, \langle .,. \rangle)$ thì mỗi $x \in X$ có duy nhất phân tích ở dạng

$$x = y + z, \qquad y \in M, z \in M^{\perp} \tag{1}$$

Phần tử y trong (1) gọi là hình chiếu trực giao của x lên M và có tính chất

$$\|x - y\| = \inf_{y' \in M} \|x - y'\|.$$

3 Hệ trực chuẩn. Chuỗi Fourier

3.1 Định nghĩa

Cho không gian Hilbert $(X, \langle .,. \rangle)$

1. Hệ $\{e_1, e_2, \ldots\} \subset X$ gọi là một hệ trực chuẩn nếu

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{nếu } i \neq j \\ 1 & \text{nếu } i = j \end{cases}$$

   Như vậy, $\{e_n\}$ là hệ trực chuẩn nếu $\|e_n\| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ và $e_i \perp e_j (i \neq j)$.

2. Hệ trực chuẩn $\{e_n\}$ gọi là đầy đủ, nếu nó có tính chất sau:

$$(x \perp e_n \quad \forall n = 1, 2, \ldots) \Rightarrow x = \theta.$$

3. Nếu $\{e_n\}$ là hệ trực chuẩn thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \cdot e_n$ gọi là chuỗi Fourier của phần tử x theo hệ chuẩn $\{e_n\}$.

Định lý 2 Cho $\{e_n\}$ là hệ trực chuẩn trong không gian Hilbert $(X, \langle .,. \rangle)$ và $\{\lambda_n\}$ là một dãy số. Ta xét chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \tag{2}$$

Ta có:

1. Chuỗi (2) hội tụ khi và chỉ khi $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 < \infty$.

2. Giả sử chuỗi (2) hội tụ và có tổng x thì

$$||x||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2, \qquad \langle x, e_n \rangle = \lambda_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Định lý 3 Chuỗi Fourier của mọi phần tử $x \in X$ theo hệ trực chuẩn $\{e_n\}$ là hội tụ và ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq ||x^2|| \qquad \text{(bất dẳng thức Bessel).}$$

Ý nghĩa của hệ trực chuẩn đầy đủ được làm rõ trong định lý sau.

Định lý 4 Cho $\{e_n\}$ là hệ trực chuẩn. Các mệnh đề sau là tương đương:

1. Hệ $\{e_n\}$ đầy đủ

2. $$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n, \qquad \forall x \in X.$$

3. $$||x||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \qquad \forall x \in X \qquad \text{(đẳng thức Parseval)}$$

II. Phần Bài tập

Bài tập 1 Trong không gian l_1 các dãy số thực $x = \{\lambda_k\}, \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| < \infty$ ta định nghĩa

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cdot \alpha_k, \qquad x = \{\lambda_k\} \in l_1, y = \{\alpha_k\} \in l_1$$

1. Chứng minh $\langle .,. \rangle$ là một tích vô hướng trên l_1.

2. $(l_1, \langle .,. \rangle)$ không là không gian Hilbert.

Giải

1. Trước tiên ta cần kiểm tra $\langle x, y \rangle$ xác định $\forall x, y \in l_1$. Thật vậy, vì $\lim \alpha_k = 0$ nên $\{\alpha_k\}$ bị chặn: $\exists M \in \mathbb{R}, |\alpha_k| \leq M \forall k \in \mathbb{N}^*$.
   Do đó
   $$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k \alpha_k| \leq M \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| < \infty$$
   và chuỗi định nghĩa $\langle x, y \rangle$ hội tụ.
   Các điều kiện của tích vô hướng dễ dàng kiểm tra.

2. Chuẩn sinh bởi $\langle .,. \rangle$ sẽ là $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}, x = \{\lambda_k\}$.
   Xét dãy $\{x_n\} \subset l_1$ với $x_n = \{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots\}$.

   - Ta có $\{x_n\}$ là dãy Cauchy vì với $n > m$:
   $$\begin{aligned} x_n - x_m &= \{0, \ldots, 0, \frac{1}{m+1}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots\} \\ \Rightarrow \|x_n - x_m\| &= \left(\sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0 \qquad (\text{khi } n, m \to \infty) \end{aligned}$$
   - Ta chứng minh $\{x_n\}$ không hội tụ.
     Giả sử trái lại tồn tại $a = \{\alpha_k\} \in l_1$ sao cho:
     $$\lim \|x_n - a\| = 0.$$
     Cố định $k \in \mathbb{N}^*$, khi $n \geq k$, ta có
     $$\left| \frac{1}{k} - \alpha_k \right| \leq \|x_n - a\|$$
     Từ đây ta có $\alpha_k = \frac{1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$, vô lý vì dãy $\{\frac{1}{k}\}_k \notin l_1$.
     Vậy l_1 với tích vô hướng trên không là không gian Hilbert.

Bài tập 2 Cho không gian Hilbert X và X_0 là không gian con đóng của X, $A : X_0 \to Y$ là ánh xạ tuyến tính liên tục(Y là một không gian định chuẩn). Chứng minh tồn tại ánh xạ tuyến tính liên tục $B : X \to Y$ sao cho $B(x) = A(x) \quad \forall x \in X_0, \|B\| = \|A\|$

Giải

- Ta định nghĩa ánh xạ A như sau. Theo định lý về phân tích trực giao, mỗi $x \in X$ có duy nhất phân tích
$$x = y + z, \quad y \in X_0, z \in X_0^{\perp} \tag{3}$$
và ta đặt $B(x) := A(y)$.
Vì phân tích dạng (3) của $x \in X_0$ là $x = x + \theta$ nên ta có ngay $B(x) = A(x) \quad \forall x \in X_0$

- Ta kiểm tra B là tuyến tính: với $x, x' \in X, \alpha, \alpha' \in K$ ta viết phân tích (3) và
$$x' = y' + z', \quad y' \in X_0, z' \in X_0^{\perp}$$
Khi đó:
$$\begin{aligned} \alpha x + \alpha' x' &= \underbrace{(\alpha y + \alpha' y')}_{\in X_0} + \underbrace{(\alpha z + \alpha' z')}_{\in X_0^{\perp}} \\ \Rightarrow B(\alpha x + \alpha' x') &= A(\alpha y + \alpha' y') \\ &= \alpha A(y) + \alpha' A(y') \\ &= \alpha B(x) + \alpha' B(x'). \end{aligned}$$

- Tiếp theo ta chứng minh B liên tục và $||B|| = ||A||$.
Từ (3) và định lý Pythagore ta có $||x||^2 = ||y||^2 + ||z||^2$, do đó:
$$\begin{aligned} ||B(x)|| &= ||A(y)|| \le ||A|| \cdot ||y|| \qquad \text{(Do } A \text{ liên tục)} \\ \Rightarrow ||B(x)|| &\le ||A|| \cdot ||x||, \quad \forall x \in X \end{aligned}$$
Vậy B liên tục và $||B|| \le ||A||$. Mặt khác ta có:
$||B|| = \sup\limits_{x \in X, ||x||=1} ||B(x)|| \ge \sup\limits_{x \in X_0, ||x||=1} ||B(x)||$
$= \sup\limits_{x \in X_0, ||x||=1} ||A(x)|| = ||A||$
Vậy $||B|| = ||A||$.

Bài tập 3 Cho hệ trực chuẩn $\{e_n\}$ trong không gian Hilbert X. Xét dãy ánh xạ

$$\begin{aligned} P_n : &X \longrightarrow X \\ &P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k, \qquad x \in X, n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

1. Chứng minh $P_n(x)$ là hình chiếu trực giao của x lên $X_n := \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$.

2. Giả sử hệ $\{e_n\}$ đầy đủ. Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} ||P_n(x) - I(x)|| = 0 \quad \forall x \in X$ nhưng $||P_n - I|| \nrightarrow 0 (I : X \to X$ là ánh xạ đồng nhất)

Giải

1. Ta có: $x = P_n(x) + (x - P_n(x)), \quad P_n(x) \in X_n$.
   Do đó chỉ còn phải chứng minh $x - P_n(x) \in X_n^{\perp}$ hay $x - P_n(x) \perp X_n$. Vì X_n sinh bởi $\{e_1, \dots, e_n\}$ nên chỉ cần chứng minh $x - P_n(x) \perp e_i \quad \forall i = 1, \dots, n$.Thật vậy:

$$\langle x - P_n(x), e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \langle e_k, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle - \langle x, e_i \rangle = 0$$

2. – Do đẳng thức Parseval, ta có $\forall x \in X$:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle \cdot e_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \cdot e_k = \lim_{n\to\infty} P_n(x)$$

   – Đặt

$$Q_n(x) = I(x) - P_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle \cdot e_k, x \in X, n = 1, 2 \dots$$

   Ta có $Q_n(x)$ tuyến tính và

$$||Q_n(x)||^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \le ||x||^2 \quad \text{(bđt Bessel)}$$

$$\Rightarrow Q_n \text{ liên tục}, ||Q_n|| \le 1$$

   Mặt khác, $Q_n(e_{n+1}) = e_{n+1}$ và $||Q_n|| \ge \dfrac{||Q_n(e_{n+1}||}{||e_{n+1}||} = 1$ nên ta có $||Q_n|| = 1$ hay $||I - P_n|| = 1$

Bài tập 4 Cho $\{e_n\}$ là hệ trực chuẩn trong không gian Hilbert X và $\{\lambda_n\}$ là dãy số.

1. Giả sử $\{\lambda_n\}$ là dãy bị chặn. Chứng minh rằng

$$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle \cdot e_n \quad x \in X \tag{4}$$

   là ánh xạ tuyến tính liên tục từ X vào X và $||A|| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} |\lambda_n|$

2. Giả sử chuỗi trong (4) hội tụ $\forall x \in X$. Chứng minh $\{\lambda_n\}$ là dãy bị chặn.

Giải

1. Đặt $M = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} |\lambda_n|$
   Đầu tiên ta kiểm tra A xác định hay chứng minh chuỗi trong (4) hội tụ. Ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n \langle x, e_n\rangle|^2 \leq M^2 \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq M^2 \cdot ||x||^2 \tag{5}$$

   nên theo định lý 2, chuỗi trong (4) hội tụ.
   Dễ kiểm tra A là ánh xạ tuyến tính. Từ định lý 2 và (5) ta có

$$||A(x)||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda \langle x, e_n\rangle|^2 \leq M^2 \cdot ||x||^2 \quad \forall x \in X$$

$$\Rightarrow A \text{ liên tục}, \quad ||A|| \leq M$$

   Mặc khác ta có:

$$A(e_k) = \lambda_k e_k \quad \text{ và } ||A(e_k)|| \leq ||A|| \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

   nên $\quad ||A|| \geq |\lambda_k| \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$. Do đó $||A|| \geq M$. Vậy $||A|| = M$ đpcm.

2. Từ giả thiết và định lý 2, ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 \cdot |\langle x, e_n\rangle|^2 < \infty \qquad \forall x \in X. \tag{6}$$

   Nếu $\{\lambda_n\}$ không bị chặn thì ta tìm được dãy con $\{\lambda_{n_k}\}_k$ sao cho $|\lambda_{n_k}| > k (k \in \mathbb{N}^*)$. Ta có

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_{n_k}|^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \Rightarrow \exists a := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{n_k}} e_{n_k} \qquad \text{(theo định lý 2)}$$

   Ta có

$$\langle a, e_n\rangle = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda_{n_k}} & \text{nếu } n = n_k \\ 0 & \text{nếu } n \notin \{n_1, n_2, \ldots\} \end{cases}$$

   do đó:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 \cdot |\langle a, e_n \rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_{n_k}|^2 \cdot \frac{1}{|\lambda_{n_k}|^2} = \infty$$

Ta gặp mâu thuẫn với (6).