TS NGUYỄN THÁI SƠN

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH

và

ĐẠI SỐ MÁY TÍNH

ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH
2014

Hình bìa

Tháp Quảng Châu là một tòa tháp truyền hình cao 600 mét tại Quảng Châu, Trung Quốc. Tháp được thiết kế phức tạp và do một công ty Hà Lan là IBA đảm nhiệm.

TS NGUYỄN THÁI SƠN

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH

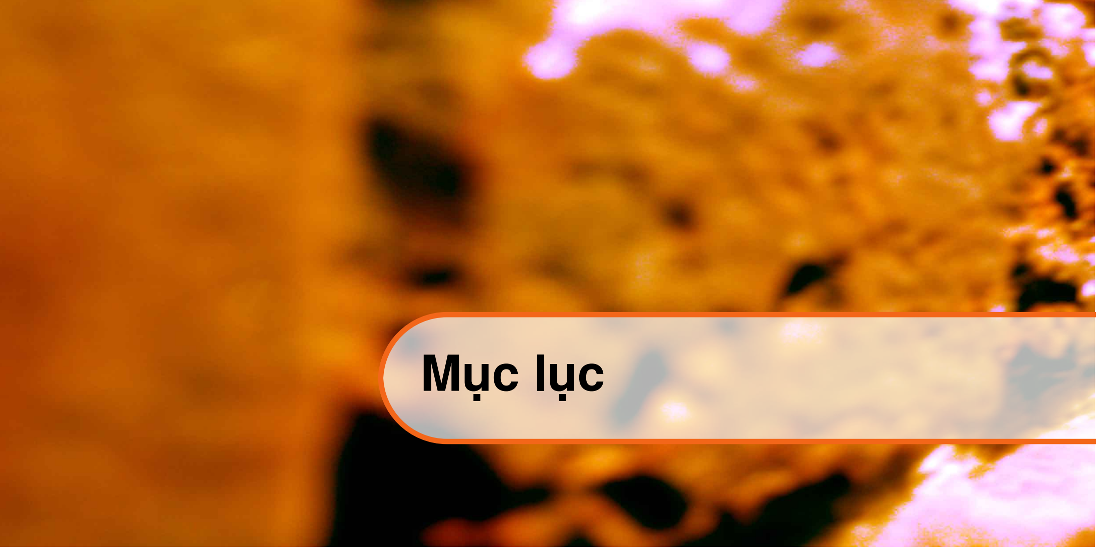
và

ĐẠI SỐ MÁY TÍNH

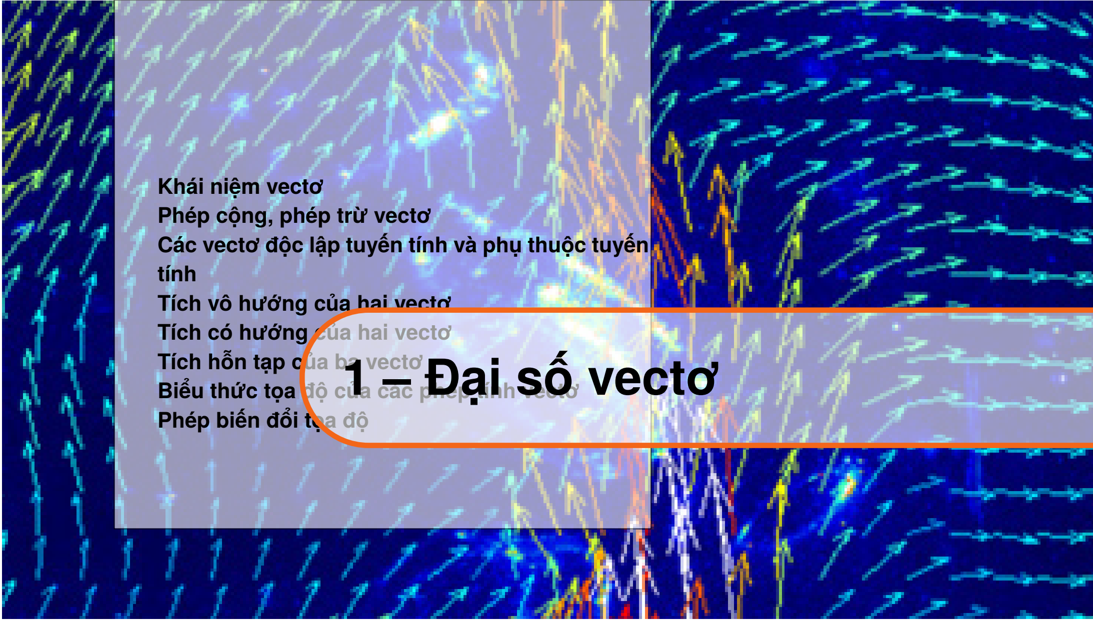
ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH
2014

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH

In lần thứ nhất, Tháng ba năm 2014



Mục lục



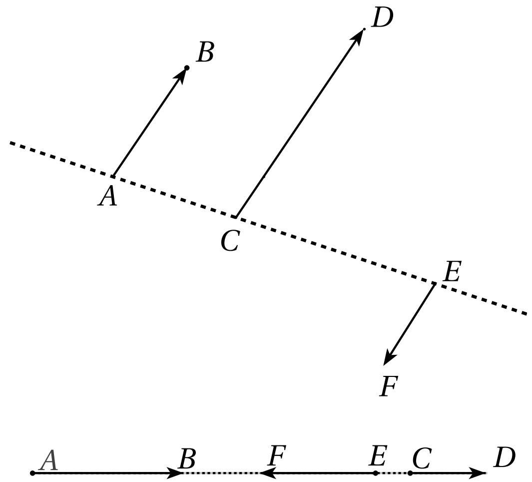
1 – Đại số vectơ

1.1 Khái niệm vectơ

- Vectơ là một đoạn thẳng đã được định hướng, nghĩa là đã qui định thứ tự của hai đầu mút. Đầu mút thứ nhất gọi là *gốc* , đầu mút thứ hai gọi là *ngọn*. Vectơ có gốc là A và ngọn là B, ký hiệu $\overrightarrow{AB}$ và đọc là *vectơ AB*. Một vectơ có gốc trùng với ngọn gọi là vectơ *không* và ký hiệu là $\overrightarrow{0}$.
- Đường thẳng đi qua A và B gọi là giá của vectơ $\overrightarrow{AB}$. Độ dài đoạn thẳng AB gọi là mô-đun của $\overrightarrow{AB}$ và ký hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$. Như vậy mô-đun của một vectơ là một số không âm. Vectơ có mô-đun bằng 1 gọi là *vectơ đơn vị*. Vectơ $\overrightarrow{0}$ có mô-đun bằng 0.
- Hai vectơ được gọi là *cùng phương* nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.
- Hai vectơ cùng phương và có giá song song thì có thể cùng hướng

hoặc ngược hướng. Đường thẳng nối hai gốc chia mặt phẳng làm hai miền. Nếu hai ngọn cùng ở một miền thì ta nói hai vectơ *cùng hướng*. Nếu hai ngọn ở hai miền khác nhau thì ta nói hai vectơ *ngược hướng*.

- Hai vectơ cùng phương và có giá trùng nhau thì ta tịnh tiến gốc của vectơ này đến trùng với gốc của vectơ kia. Nếu ngọn của vectơ này cùng phía với ngọn của vectơ kia thì ta nói hai vectơ *cùng hướng*, ngược lại ta nói hai vectơ *ngược hướng*.



Trên hình vẽ, $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với $\overrightarrow{CD}$ và ngược hướng với $\overrightarrow{EF}$.

- Hai vectơ được gọi là *bằng nhau* nếu cùng hướng và có mô-đun bằng nhau. Hai vectơ được gọi là *đối nhau* nếu ngược hướng và có mô-đun bằng nhau.
- Nếu $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ bằng nhau ta viết:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

nếu $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ đối nhau ta viết $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$,

- Một vectơ có gốc xác định, ví dụ $\overrightarrow{AB}$, gọi là *vectơ buộc*. Một vectơ mà ta chỉ quan tâm tới phương, hướng và mô-đun và không quan tâm tới gốc của vectơ này đặt ở đâu được gọi là *vectơ tự do*. Ta thường ký hiệu vectơ tự do là $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ v.v...

1.2 Phép cộng, phép trừ vectơ

1.2.1 Cộng vectơ

Cho hai vectơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$. Từ một điểm O trong mặt phẳng ta vẽ $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{b}$. Vectơ $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{OC}$ gọi là vectơ tổng của hai vectơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$.

1.2.2 Các tính chất của phép cộng vectơ

Tính chất 1. Phép cộng vectơ có tính chất giao hoán, nghĩa là:

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$$

Tính chất 2. Phép cộng vectơ có tính chất kết hợp, nghĩa là:

$$(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$$

Tính chất 3.

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{a}$$

Tính chất 4.

$$\overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}$$

1.2.3 Trừ vectơ

Cho hai vectơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$. Ta định nghĩa:

$$\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} + \left(-\overrightarrow{b}\right)$$

Nhận xét

① **Hệ thức Chasles**. Theo định nghĩa ta có:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

② **Công thức đổi gốc.**

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$

③ **Mô-đun của tổng và hiệu.**

$$|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|\leqslant|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}| \tag{1.1}$$

$$|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|\geqslant|\overrightarrow{a}|-|\overrightarrow{b}| \tag{1.2}$$

Trong công thức (1.1), xảy ra dấu bằng khi và chỉ khi $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ cùng hướng.
Trong công thức (1.2), xảy ra dấu bằng khi và chỉ khi $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ cùng hướng và $|\overrightarrow{a}|\geqslant|\overrightarrow{b}|$.

1.2.4 Nhân một vectơ với một số

Định nghĩa 1.2.1 Tích của $\overrightarrow{a}$ với số thực $k\neq 0$ là một vectơ ký hiệu $k\overrightarrow{a}$. có mô-đun bằng $|k|.|\overrightarrow{a}|$, cùng hướng với $\overrightarrow{a}$ nếu $k>0$ và ngược hướng với $\overrightarrow{a}$ nếu $k<0$. Tích của vectơ $\overrightarrow{a}$ với số 0 là $\overrightarrow{0}$.

Tính chất

Tính chất 1.	$1.\overrightarrow{a}=\overrightarrow{a}$
Tính chất 2.	$(-1).\overrightarrow{a}=-\overrightarrow{a}$
Tính chất 3.	$p.(q\overrightarrow{a})=(pq)\overrightarrow{a}$
Tính chất 4.	$p.(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})=p\overrightarrow{a}+p\overrightarrow{b}$
Tính chất 5.	$(p+q).\overrightarrow{a}=p\overrightarrow{a}+q\overrightarrow{a}$

1.3 Các vectơ độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính

Định nghĩa 1.3.1
Cho k vectơ $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \dots, \overrightarrow{a_k}$ và k số thực $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$.

- Ta gọi
$$\sum_{i=1}^{k} p_i\overrightarrow{a_i} = p_1\overrightarrow{a_1} + p_2\overrightarrow{a_2} + p_3\overrightarrow{a_3} + \cdots + p_k\overrightarrow{a_k}$$
là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \dots, \overrightarrow{a_k}$.
- Các vectơ $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \dots, \overrightarrow{a_k}$ được gọi là *phụ thuộc tuyến tính* nếu tồn tại các số $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$ không đồng thời bằng 0 sao cho
$$\sum_{i=1}^{k} p_i\overrightarrow{a_i} = \overrightarrow{0}$$
- Các vectơ $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \dots, \overrightarrow{a_k}$ được gọi là *độc lập tuyến tính* nếu từ
$$\sum_{i=1}^{k} p_i\overrightarrow{a_i} = \overrightarrow{0}$$
ta suy ra $p_1 = p_2 = p_3 = \cdots = p_k = 0$.

1.3.1 Điều kiện cần và đủ để một hệ vectơ là phụ thuộc tuyến tính

Định lý 1.3.1 Một hệ vectơ $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \dots, \overrightarrow{a_k} \quad (k > 1)$ là phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi có ít nhất một trong các vectơ ấy là tổ hợp tuyến tính của các vectơ còn lại.

Chứng minh.

Cần. Giả sử hệ vectơ $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \dots, \overrightarrow{a_k} \quad (k > 1)$ là phụ thuộc tuyến tính. Theo định nghĩa tồn tại một số $p_j \neq 0$ sao cho

$$p_j\overrightarrow{a_j} + \sum_{i \neq j} p_i\overrightarrow{a_i} = \overrightarrow{0}$$

Khi đó: $$\overrightarrow{a_j} = -\sum_{i\neq j}\frac{p_i}{p_j}\overrightarrow{a_i}$$

Đủ. Giả sử trong hệ vectơ $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \ldots, \overrightarrow{a_k} \quad (k > 1)$ có một vectơ là tổ hợp tuyến tính của các vectơ còn lại, giả sử vectơ đó là $\overrightarrow{a_k}$ sao cho

$$\overrightarrow{a_k} = \sum_{i=1}^{k-1} p_i\overrightarrow{a_i}$$

Khi đó:
$$\sum_{i=1}^{k-1} p_i\overrightarrow{a_i} - 1.\overrightarrow{a_k} = \overrightarrow{0}$$

vì $-1 \neq 0$ nên hệ vectơ trênđã nêu là phụ thuộc tuyến tính.

Định lý 1.3.2 Điều kiện cần và đủ để hai vectơ phụ thuộc tuyến tính là chúng cùng phương.

Chứng minh. Giả sử $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ là phụ thuộc tuyến tính. Khi đó $\overrightarrow{a} = p.\overrightarrow{b}$ hay $\overrightarrow{b} = q.\overrightarrow{a}$. Như vậy hai vectơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ cùng phương.

Ngược lại, giả sử hai vectơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ cùng phương. Ta chỉ xét trường hợp $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$ và $\overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$.
Hai vectơ $\overrightarrow{e_1} = \dfrac{\overrightarrow{a_1}}{|\overrightarrow{a_1}|}$ và $\overrightarrow{e_2} = \dfrac{\overrightarrow{a_2}}{|\overrightarrow{a_2}|}$ cùng phương và có mô-đun bằng nhau (vì đều bằng 1) nên bằng nhau hoặc đối nhau. Ta viết:

$$\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_2} \quad \text{hay} \quad \overrightarrow{e_1} = -\overrightarrow{e_2}$$

Vậy $\quad \overrightarrow{a_1} = k.\overrightarrow{a_2}$ với $k = \pm\dfrac{|\overrightarrow{a_1}|}{|\overrightarrow{a_2}|}$. Do đó hệ hai vectơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ là phụ thuộc tuyến tính.

Định lý 1.3.3 Điều kiện cần và đủ để ba vectơ phụ thuộc tuyến tính là chúng đồng phẳng.

Chứng minh. Giả sử hệ ba vectơ $\left\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right\}$ là phụ thuộc tuyến tính. Khi đó có một vectơ là tổ hợp tuyến tính của hai vectơ còn lại, giả sử $\overrightarrow{c} = p.\overrightarrow{a} + q.\overrightarrow{b}$. Từ điểm O vẽ $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}, \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}, \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{c}$, ta có:

$$\overrightarrow{OC} = p.\overrightarrow{OA} + q.\overrightarrow{OB} \tag{1.3}$$

- Nếu $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ không cùng phương thì ba điểm O, A, B không thẳng hàng. Qua ba điểm này ta vẽ được một mặt phẳng (P). Từ đẳng thức (1.3) ta suy ra điểm $C \in (P)$. Vậy ba vectơ $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ đồng phẳng.
- Nếu $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ cùng phương thì ba điểm O, A, B nằm trên một đường thẳng. Từ đẳng thức (1.3) ta suy ra điểm C cũng nằm trên đường thẳng ấy. Do đó ba vectơ $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ đồng phẳng.

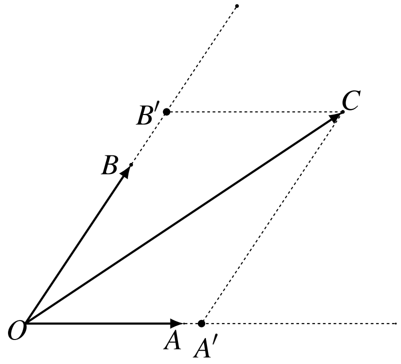
Tóm lại ta đã chứng minh ba vectơ $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ và $\overrightarrow{c}$ đồng phẳng.

Ngược lại, giả sử ba vectơ $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ và $\overrightarrow{c}$ đồng phẳng. Ta xét hai trường hợp.

Trường hợp 1. $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ không cùng phương. Gọi d_A, d_B lần lượt là đường thẳng OA và OB. Từ C ta vẽ CA' song song với d_B cắt d_A tại A'. Cũng từ C ta vẽ CB' song song với d_A cắt d_B tại B'. Theo qui tắc hình bình hành ta có:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} = p.\overrightarrow{OA} + q.\overrightarrow{OB}$$

Như vậy $\overrightarrow{c} = p.\overrightarrow{a} + q\,\overrightarrow{b}$. Do đó ba vectơ $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ và $\overrightarrow{c}$ là phụ thuộc tuyến tính.



Trường hợp 2. $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ cùng phương, ta có $\overrightarrow{a} = k.\overrightarrow{b}$. Ta viết:

$$1.\overrightarrow{a} - k.\overrightarrow{b} + 0.\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$$

Do đó hệ ba vectơ $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ và $\overrightarrow{c}$ là phụ thuộc tuyến tính.

1.4 Tích vô hướng của hai vectơ

Định nghĩa 1.4.1 Cho hai vectơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ và gọi d là giá của vectơ $\overrightarrow{b}$. Trên d ta chọn vectơ đơn vị $\overrightarrow{e}$ cùng hướng với $\overrightarrow{b}$. Khi đó ta gọi d là *trục* chứa vectơ $\overrightarrow{b}$.

Giả sử $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AB}$. Gọi A' và B' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B trên d. Vectơ $\overrightarrow{A'B'}$ gọi là vectơ chiếu của vectơ $\overrightarrow{AB}$ trên trục d. Ta có:

$$\overrightarrow{A'B'} = p.\overrightarrow{e}$$

$p > 0$ nếu $\overrightarrow{A'B'}$ cùng hướng với $\overrightarrow{e}$ và $p < 0$ nếu $\overrightarrow{A'B'}$ ngược hướng với $\overrightarrow{e}$. Ngoài ra $|p| = |\overrightarrow{A'B'}| = A'B'$.

Số đại số p gọi là *chiếu của vectơ* $\overrightarrow{b}$ *lên trục chứa vectơ* $\overrightarrow{a}$ và ta ký hiệu là $\text{ch}_{\overrightarrow{a}}\overrightarrow{b}$.

Ta chứng minh

$$\boxed{\operatorname{ch}_{\overrightarrow{d}}\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{b}|.\cos\varphi}$$

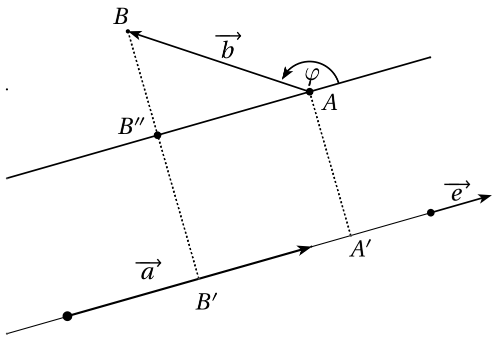
với φ là góc tạo bởi $\overrightarrow{b}$ và $\overrightarrow{d}$.

- nếu φ là góc vuông, nghĩa là $\overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{d}$ thì $\operatorname{ch}_{\overrightarrow{d}}\overrightarrow{b} = 0$ vì lúc đó $A' \equiv B'$.
- nếu φ là góc tù (xem hình vẽ) thì

  $$|\overrightarrow{b}|.\cos(\pi - \varphi) = AB'' = A'B' \Longrightarrow |\overrightarrow{b}|.\cos\varphi = -A'B'$$

  Do φ là góc tù nên: $\overrightarrow{A'B'}$ ngược hướng với $\overrightarrow{d}$, do đó ngược hướng với $\overrightarrow{e}$. Vậy $p = -A'B'$.

  Như vậy ta có:
  $$|\overrightarrow{b}|.\cos\varphi = p = \operatorname{ch}_{\overrightarrow{d}}\overrightarrow{b}$$



- nếu φ là góc nhọn ta chứng minh tương tự.

Định nghĩa 1.4.2 Tích vô hướng của hai vectơ là *một số* bằng tích mô-đun của hai vectơ với cosin của góc tạo bởi hai vectơ ấy.

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và vectơ $\vec{b}$ và gọi φ là góc tạo bởi hai vectơ. Theo định nghĩa ta có:

$$\begin{aligned}\vec{a}.\vec{b} &= |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\varphi \\ &= |\vec{a}|.\ \mathrm{ch}_{\vec{a}}\vec{b}\end{aligned}$$

Hệ quả 1.4.1

(1) Ta ký hiệu $\vec{a}.\vec{a} = \vec{a}^2$ và đọc là *bình phương vô hướng của vectơ* $\vec{a}$.

Ta có: $\vec{a}.\vec{a} = |\vec{a}|^2$.
Vậy

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

(2) Điều kiện cần và đủ để hai vectơ (khác $\vec{0}$) vuông góc với nhau là tích vô hướng của chúng bằng không.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$$

1.4.1 Tính chất

(1) Tích vô hướng có tính chất giao hoán:

$$\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$$

(2) Tích vô hướng có tính chất phân phối với phép toán cộng:

$$\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$$

(3) $p.\left(\vec{a}.\vec{b}\right) = (p.\vec{a}).\vec{b} = \vec{a}.\left(p.\vec{b}\right)$

1.4.2 Áp dụng

Dựa vào các tính chất đã liệt kê ta chứng minh được các hằng đẳng thức sau đây:

① $\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right).\left(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right)=\overrightarrow{a}^2-\overrightarrow{b}^2$

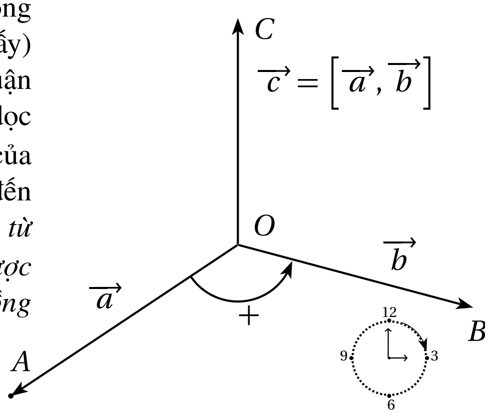
② $\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)^2=\overrightarrow{a}^2+2\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}+\overrightarrow{b}^2$

③ $\left(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right)^2=\overrightarrow{a}^2-2\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}+\overrightarrow{b}^2$

1.5 Tích có hướng của hai vectơ

Định nghĩa 1.5.1

Tam diện tạo bởi ba vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ (không đồng phẳng và theo thứ tự ấy) được gọi là tam diện thuận nếu một người đứng dọc theo vectơ $\overrightarrow{OC}$ (hướng của vectơ là hướng từ chân đến đầu) *thấy hướng quay từ* $\overrightarrow{OA}$ *đến vectơ* $\overrightarrow{OB}$ *là ngược hướng quay của kim đồng hồ.*



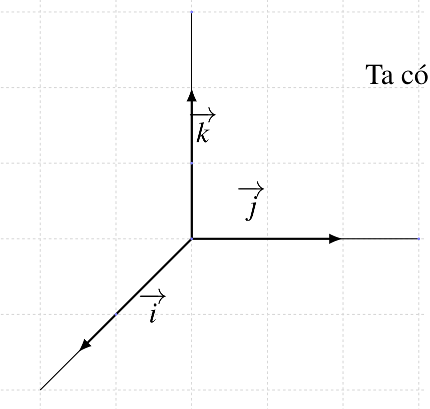
Định nghĩa 1.5.2 Tích có hướng của hai vectơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ là vectơ $\overrightarrow{c}$ thỏa các điều kiện sau đây:

- $\overrightarrow{c}\perp\overrightarrow{a}$; $\overrightarrow{c}\perp\overrightarrow{b}$

- tam diện tạo bởi ba vectơ $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ là tam diện thuận
- $|\overrightarrow{c}| = |\overrightarrow{a}|.|\overrightarrow{b}|.|\sin\varphi|$

Ta ký hiệu tích có hướng của hai vectơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ là $\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right]$.

■ **Ví dụ 1.1** Trong không gian cho $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ là ba vectơ đơn vị và vuông góc với nhau từng đôi một như hình vẽ.



Ta có:

$$\left[\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right] = \overrightarrow{k}$$
$$\left[\overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right] = \overrightarrow{i}$$
$$\left[\overrightarrow{k}, \overrightarrow{i}\right] = \overrightarrow{j}$$
■

Từ định nghĩa ta có nhận xét sau đây:

- Nếu $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ là hai vectơ cùng phương thì $\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] = \overrightarrow{0}$.
- Mô-đun của $\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right]$ bằng diện tích của hình bình hành tạo bởi hai vectơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$.

1.5.1 Tính chất

① **Tính chất 1:** Tích có hướng của hai vectơ có tính chất phản giao hoán, nghĩa là:

$$\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] = -\left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}\right]$$

(2) **Tính chất 2:** Tích có hướng của hai vectơ có tính chất phân phối đối với phép cộng vectơ, nghĩa là:

$$\left[\vec{a},\vec{b}+\vec{c}\right]=\left[\vec{a},\vec{b}\right]+\left[\vec{a},\vec{c}\right]$$
$$\left[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\right]=\left[\vec{a},\vec{c}\right]+\left[\vec{b},\vec{c}\right]$$

(3) **Tính chất 3:** $p.\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left[p.\vec{a},\vec{b}\right]=\left[a,p.\vec{b}\right]$

Nhận xét Tích có hướng của hai vectơ thỏa đồng nhất thức Jacobi:

$$\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right]+\left[\vec{b},\left[\vec{c},\vec{a}\right]\right]+\left[\vec{c},\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right]=\vec{0}$$

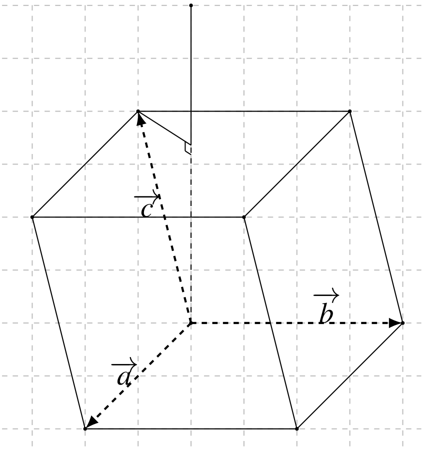
Như vậy không gian $\mathbb{R}^3$ cùng với phép toán hai ngôi là tích có hướng của hai vectơ lập thành một *đại số Lie*.

1.6 Tích hỗn tạp của ba vectơ

Định nghĩa 1.6.1 Ta định nghĩa tích hỗn tạp của ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ theo đúng thứ tự đó là:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c}$$

Định lý 1.6.1 Tích hỗn tạp của ba vectơ không đồng phẳng $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ là một số có giá trị tuyệt đối bằng thể tích của hình hộp dựng trên ba vecơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. Số ấy dương nếu ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ lập thành một tam diện thuận và âm nếu ba vectơ lập thành một tam diện nghịch.



Giả sử $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ là ba vectơ không đồng phẳng. Nếu ba vectơ trên lập thành một tam diện thuận thì $\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right]$ và $\overrightarrow{c}$ hợp với nhau một góc nhọn.

Khi đó

$$\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right) = \left|\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right]\right| .\text{ch}_{\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right]}\overrightarrow{c}$$

$\left|\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right]\right|$ là diện tích hình bình hành tạo bởi hai vectơ $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$.

$\text{ch}_{\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right]}\overrightarrow{c}$ là chiều cao hình hộp dựng trên ba vectơ $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$.

Vậy $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right)$ bằng thể tích V của hình hộp và là một số dương.

Nếu ba vectơ trên lập thành một tam diện nghịch thì $\left\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, -\overrightarrow{c}\right\}$ lập thành một tam diện thuận nên theo chứng minh trên:

$$\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, -\overrightarrow{c}\right) = V$$

Do đó: $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right) = -\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right].(-\overrightarrow{c}) = -V < 0.$

Định lý 1.6.2 Điều kiện cần và đủ để ba vectơ đồng phẳng là tích hỗn tạp của chúng bằng 0.

Chứng minh.
Cần. Giả sử $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ là ba vectơ đồng phẳng. Từ điểm O ta vẽ:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a} \quad ; \quad \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b} \quad ; \quad \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{c}$$

- Nếu $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ cùng phương thì $\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] = \overrightarrow{0}$, do đó:

$$\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right) = 0$$

- Nếu $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ không cùng phương thì $\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] = \overrightarrow{d} = \overrightarrow{OD}$. Do $OD \perp \text{mp}(OAB)$ nên $OD \perp OC$. Nghĩa là:

$$\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] \perp \overrightarrow{c} \Rightarrow \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right) = 0$$

Đủ. Giả sử $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right) = 0$. Nếu ba vectơ $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ không đồng phẳng thì theo định lý trên, $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right)$ có giá trị tuyệt đối bằng bằng thể tích của hình hộp dựng trên ba vecơ $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$. Do đó $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right) \neq 0$. Mâu thuẩn.

1.7 Biểu thức tọa độ của các phép tính vectơ

Trong không gian $Oxyz$ với hệ trục tọa độ trực chuẩn $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ trong đó $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục $Ox; Oy$ và Oz.
Giả sử ta có ba vectơ $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ như sau:

$$\overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{i} + a_2\overrightarrow{j} + a_3\overrightarrow{k}$$
$$\overrightarrow{b} = b_1\overrightarrow{i} + b_2\overrightarrow{j} + b_3\overrightarrow{k}$$
$$\overrightarrow{c} = c_1\overrightarrow{i} + c_2\overrightarrow{j} + c_3\overrightarrow{k}$$

① Tích vô hướng của hai vectơ:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} &= \left(a_1\overrightarrow{i}+a_2\overrightarrow{j}+a_3\overrightarrow{k}\right).\left(b_1\overrightarrow{i}+b_2\overrightarrow{j}+b_3\overrightarrow{k}\right)\\ &= a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3 \qquad (1.4)\end{aligned}$$

② Tích có hướng của hai vectơ:

$$\begin{aligned}\left[\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\right] &= \left[\left(a_1\overrightarrow{i}+a_2\overrightarrow{j}+a_3\overrightarrow{k}\right),\left(b_1\overrightarrow{i}+b_2\overrightarrow{j}+b_3\overrightarrow{k}\right)\right]\\ &= (a_2b_3-a_3b_2)\overrightarrow{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\overrightarrow{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\overrightarrow{k} \qquad (1.5)\\ &= \begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix} \qquad (1.6)\end{aligned}$$

③ Tích hỗn tạp của ba vectơ:

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\right) &= \left[\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\right].\overrightarrow{c}\\ &= \begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix} \qquad (1.7)\end{aligned}$$

1.8 Phép biến đổi tọa độ

1.8.1 Phép tịnh tiến

Trong mặt phẳng, xét hai hệ trục tọa độ trực chuẩn (I) Oxy và (II) $Ix'y'$ trong đó hệ trục (II) là ảnh của hệ trục (I) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ với điểm I có tọa độ đối với hệ (I) là $(a;b)$.

Giả sử một điểm M có tọa độ đối với hệ trục (I) là $(x;y)$ và tọa độ đối với hệ trục (II) là $(x';y')$. Ta thiết lập mối quan hệ giữa $(x;y)$ và $(x';y')$.

Ta có:

$$\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OI} \Longleftrightarrow \begin{cases} x'.\overrightarrow{i'} & = x.\overrightarrow{i} - a.\overrightarrow{i} \\ y'.\overrightarrow{j'} & = y.\overrightarrow{j} - b.\overrightarrow{j} \end{cases}$$

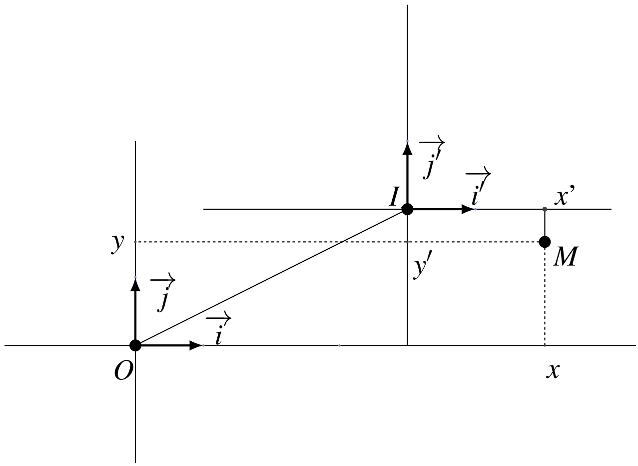
Ta có nhận xét do phép tịnh tiến ta có: $\overrightarrow{i'} = \overrightarrow{i}$ và $\overrightarrow{j'} = \overrightarrow{j}$. Do đó từ đẳng thức trên ta suy ra:

$$\begin{cases} x' & = x - a \\ y' & = y - b \end{cases}$$

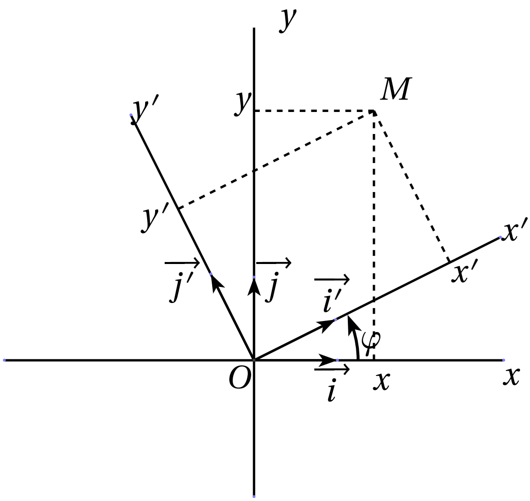
hay

$$\begin{cases} x & = x' + a \\ y & = y' + b \end{cases} \tag{1.8}$$

Các công thức (1.8) gọi là *biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến.*



1.8.2 Phép quay



Quay hệ trục tọa độ (I) (Oxy) một góc φ quanh gốc O ta có hệ trục tọa độ (II) $(Ix'y')$. Gọi $\overrightarrow{i'}$, $\overrightarrow{j'}$ là các vectơ đơn vị trên hệ trục (II). Ta có:

$$\overrightarrow{i'} = \cos\varphi\,\overrightarrow{i} + \sin\varphi\,\overrightarrow{j}$$

Suy ra:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{j'} &= \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{i} + \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{j}\\ &= -\sin\varphi\,\overrightarrow{i} + \cos\varphi\,\overrightarrow{j}\end{aligned}$$

Giả sử điểm M có tọa độ $(x;y)$ trong hệ (I) và $(x';y')$ trong hệ (II). Vậy:

$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} \qquad (1.9)$$

Ngoài ra

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= x'\,\overrightarrow{i'} + y'\,\overrightarrow{j'}\\ &= x'\left(\cos\varphi\,\overrightarrow{i} + \sin\varphi\,\overrightarrow{j}\right) + y'\left(-\sin\varphi\,\overrightarrow{i} + \cos\varphi\,\overrightarrow{j}\right)\\ &= \left(x'\cos\varphi - y'\sin\varphi\right)\overrightarrow{i} + \left(x'\sin\varphi + y'cos\varphi\right)\overrightarrow{j}\end{aligned} \qquad (1.10)$$

So sánh (1.9) và (1.10) ta có:

$$\begin{cases} x &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ y &= x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x' &= x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ y' &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases} \tag{1.11}$$

Các công thức (1.11) gọi là *biểu thức tọa độ của phép quay*.

1.8.3 Phép dời

Tích của phép quay và phép tịnh tiến có tính chất giao hoán và tích của hai phép biến hình này gọi là *phép dời*.

Biểu thức tọa độ của phép dời là:

$$\begin{cases} x &= a + x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ y &= b + x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{cases} \tag{1.12}$$

■ **Ví dụ 1.2** Trong mặt phẳng xét một đường ℓ là tập hợp những điểm M có tọa độ thỏa mãn phương trình:

$$x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 6 = 0 \quad (\ell)$$

thực hiện phép quay một góc $\varphi = \frac{\pi}{4}$ quanh điểm $I\left(-\frac{19}{24}; \frac{31}{24}\right)$. Hãy viết phương trình của đường ℓ trong hệ trục tọa độ mới $Ix'y'$ và cho biết ℓ là đường gì?

Giải:

Xét phép dời thực hiện như đề bài yêu cầu. Biểu thức tọa độ của phép dời là:

$$\begin{cases} x &= -\frac{19}{24} + x'\cos\frac{\pi}{4} - y'\sin\cos\frac{\pi}{4} \\ y &= \frac{31}{24} + x'\sin\cos\frac{\pi}{4} + y'\cos\cos\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

hay:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{19}{24} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \\ y = \dfrac{31}{24} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \end{cases} \tag{1.13}$$

Thay (1.13) vào phương trình của đường ℓ ta có:

$$\left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}x'\right)^2 + \frac{23}{4} - \sqrt{2}x' + 3\sqrt{2}y' - 6 = 0$$

thu gọn:

$$\left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}x'\right)^2 - \sqrt{2}(x' + 3y') - \frac{1}{4} = 0$$

Nếu ta đặt $X = \dfrac{1}{2} + \sqrt{2}x'$; $Y = x' + 3y' + 7\sqrt{2}$ ta có:

$$Y = \frac{X^2}{\sqrt{2}}$$

Phương trình trên biểu diễn ℓ là một parabol. ■

BÀI TẬP

Bài tập 1.1 Cho hai vectơ $\overrightarrow{a}$; $\overrightarrow{b}$ sao cho $|\overrightarrow{a}| = 3$; $|\overrightarrow{b}| = 2$ và $(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}}) = 120°$. Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{p} = 2.\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ và $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}$. ■

Bài tập 1.2 Cho tam giác ABC có đường phân giác trong AD. Hãy biểu thị tuyến tính $\overrightarrow{AD}$ theo các vectơ $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AC}$. Cho biết các độ dài các cạnh $AB = c$; $AC = b$. ■

Bài tập 1.3 Cho tam giác ABC có trung tuyến CM vuông góc với đường phân giác trong AL. Cho biết $\dfrac{CM}{AL} = n$. Hãy tính góc A theo n. ■

Bài tập 1.4 Cho tam giác ABC với diện tích S. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AB và AC. Điểm $M \neq C$ và điểm N cùng nằm trên cạnh BC sao cho $NM = NC$. Các đường thẳng AN và EM lần lượt cắt BF tại P và Q. Đặt S' là diện tích tứ giác $MNPQ$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{6}S \leqslant S' \leqslant \frac{1}{5}S$$

■

Bài tập 1.5 Cho hai vectơ $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$. Chứng minh rằng:

$$\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right]^2 + \left(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}\right)^2 = |\overrightarrow{a}|^2.|\overrightarrow{b}|^2$$

■

Bài tập 1.6 Chứng minh rằng nếu ba vectơ $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ thỏa mãn đẳng thức:

$$\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] + \left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right] + \left[\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}\right] = \overrightarrow{0}$$

thì ba vectơ đó đồng phẳng. ■

Bài tập 1.7 Cho $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ là ba vectơ không đồng phẳng. Chứng minh rằng nếu $\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] = \left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right] = \left[\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}\right]$ thì $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$ và ngược lại. ■

Bài tập 1.8 Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ là ba vectơ trong không gian thì:

$$\left[\overrightarrow{a}, \left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right]\right] = (\overrightarrow{a}.\overrightarrow{c}).\overrightarrow{b} - (\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}).\overrightarrow{c}$$

Từ đó hãy chứng minh rằng:

$$\left[\overrightarrow{a}, \left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right]\right] + \left[\overrightarrow{b}, \left[\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}\right]\right] + \left[\overrightarrow{c}, \left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right]\right] = \overrightarrow{0}$$

■

Bài tập 1.9 Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{a}$; $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{b}$; $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{c}$. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ D đến mặt phẳng (ABC). Chứng minh rằng: $\overrightarrow{DH} = \dfrac{(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})}{\overrightarrow{d}^2}.\overrightarrow{d}$

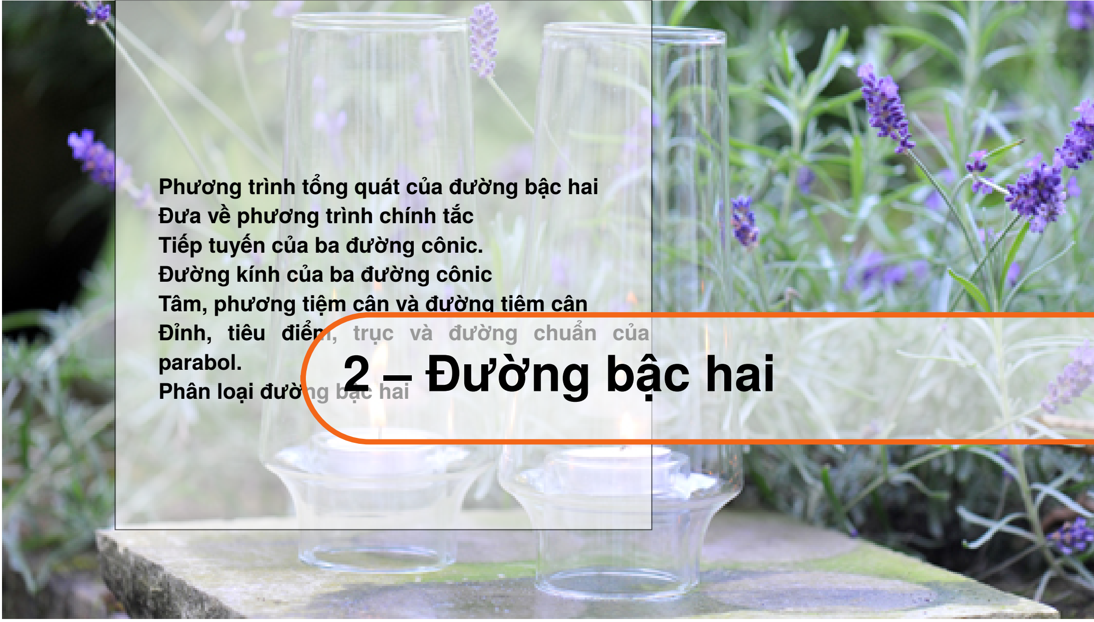
với $\quad \overrightarrow{d} = \left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] + \left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right] + \left[\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}\right]$. ■

Bài tập 1.10 Cho hai hệ trục tọa độ trực chuẩn (I) Oxy và (II) $Ix'y'$, với hệ (II) là ảnh của hệ (I) qua phép tịnh tiến. Biết một điểm M có tọa độ đối với hệ (I) là $(4;-1)$ và với hệ (II) là $(1;-4)$. Tìm vectơ tọa độ của vectơ tịnh tiến. ■

Bài tập 1.11 Cho hai hệ trục tọa độ trực chuẩn (I) Oxy và (II) $Ox'y'$, với hệ (II) là ảnh của hệ (I) qua phép quay góc φ. Biết một điểm M có

tọa độ đối với hệ (I) là $(2;3)$ và với hệ (II) là $\left(\dfrac{2-3\sqrt{3}}{2};\dfrac{2+3\sqrt{3}}{2}\right)$.
Tìm góc quay φ. ■

Bài tập 1.12 Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ trực chuẩn (I) Oxy cho một đường ℓ có phương trình:$x^2+3xy-y-4=0$ và điểm $I\left(\dfrac{1}{3};-\dfrac{2}{9}\right)$.
Tịnh tiến hệ trục tọa độ Oxy theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ ta được hệ trục tọa độ (II) $Ix'y'$. Hãy viết phương trình của đường ℓ trong hệ trục (II). ■



2 – Đường bậc hai

2.1 Phương trình tổng quát của đường bậc hai

Đường bậc hai là một đường có phương trình trong hệ trục tọa độ Đề-cac vuông góc Oxy là:

$$f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{2.1}$$

trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0.

Trước hết ta thực hiện phép quay trục tọa độ một góc u theo công thức

$$\begin{cases} x &= x' \cos u - y' \sin u \\ y &= x' \sin u + y' \cos u \end{cases} \tag{2.2}$$

Thay x, y từ hệ phương trình trên vào (2.1) ta có:

$$f'(x,y) = A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 + 2D'x + 2E'y + F' = 0 \tag{2.3}$$

trong đó:

$$A' = A\cos^2 u + 2B\cos u \sin u + C\sin^2 u \tag{2.4}$$

$$B' = -A\sin u\cos u + B\cos^2 u - B\sin^2 u + C\sin u\cos u \tag{2.5}$$

$$C' = A\sin^2 u - 2B\sin u\cos u + C\cos^2 u \tag{2.6}$$

$$D' = D\cos u + E\sin u \tag{2.7}$$

$$E' = -D\sin u + E\cos u \tag{2.8}$$

$$F' = F \tag{2.9}$$

Cách tính D' và E'.

D	E
$\cos u$	$\sin u$

Để tìm D' ta nhân "*thẳng*": $D' = D\cos u + E\sin u$

Để tìm E' ta tính "*định thức ngược*": $E' = E\cos u - D\sin u$

Muốn cho phương trình (2.3) không chứa số hạng chữ nhật (hệ số của $x'y'$) ta cần chọn góc u sao cho $B' = 0$, nghĩa là:

$$2B\cos 2u = (A - C)\sin 2u$$

Từ đó

$$\tan 2u = \frac{2B}{A-C} \tag{2.10}$$

Biết được $\tan 2u$ ta tìm được $\cos u$ và $\sin u$ từ đó tính được tất cả các số hạng còn lại của phương trình (2.3). Trong trường hợp riêng khi $A = C$ ta sẽ chọn $u = \dfrac{\pi}{4}$.

■ **Ví dụ 2.1** Với $f(x,y) = x^2 - 8xy + 7y^2 + 6x - 6y + 9 = 0$ ■

ta tính được:

$$\tan 2u = \frac{-8}{1-7} = \frac{4}{3} \Rightarrow \cos 2u = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos u = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad ; \quad \sin u = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

(ta chọn $0 < 2u < \pi$)

Khi đó:

$$\begin{aligned}
A' &= \cos^2 u - 8\sin u \cos u + 7\sin^2 u = -1 \\
C' &= \sin^2 u + 8\sin u \cos u + 7\cos^2 u = 9 \\
&\text{(chú ý:} \quad A' + C' = A + C = 8) \\
D' &= 3\cos u - 3\sin u = \frac{3\sqrt{5}}{5} \\
E' &= -3\sin u - 3\cos u = -\frac{9\sqrt{5}}{5} \\
F' &= F = 9
\end{aligned}$$

Vậy: $f'(x', y') = -x'^2 + 9y'^2 + \dfrac{6\sqrt{5}}{5}x' - \dfrac{18\sqrt{5}}{5}y' + 9 = 0$

Từ đó ta suy ra:

$$\left(x' - \frac{3\sqrt{5}}{5}\right)^2 - 9\left(y' - \frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 - 9 = 0$$

Mặt khác:

$$B' = 0 \Longleftrightarrow (A\cos u + B\sin u)\sin u = (B\cos u + C\sin u)\cos u$$

hay

$$\frac{A\cos u + B\sin u}{\cos u} = \frac{B\cos u + C\sin u}{\sin u} = t \tag{2.11}$$

Từ đó:

$$\begin{cases} (A-t)\cos u + B\sin u &= 0 \\ B\cos u + (C-t)\sin u &= 0 \end{cases}$$

Ta có thể xem hện trên như là một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất với hai ẩn là $\cos u$ và $\sin u$. Vì $\cos u$ và $\sin u$ không đồng thới bằng 0 nên hệ phương trình có ngiệm khi và chỉ khi:

$$\begin{vmatrix} A-t & B \\ B & C-t \end{vmatrix} = 0$$

hay

$$t^2 - (A+C)t + AC - B^2 = 0 \tag{2.12}$$

Phương trình (2.12) được gọi là phương trình đặc trưng của đường bậc hai. Đây là phương trình bậc hai. Phương trình này luôn có nghiệm vì biệt thức của nó là:

$$\Delta = (A+C)^2 - 4(AC - B^2) = (A-C)^2 + 4B^2 \geqslant 0$$

Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp $\Delta > 0$. Phương trình (2.12) có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2.

Thay hai nghiệm này vào (2.11) ta có:

$$\tan u_1 = \frac{t_1 - A}{B} = \frac{B}{t_1 - C} \quad \text{và} \quad \tan u_2 = \frac{t_2 - A}{B} = \frac{B}{t_2 - C} \tag{2.13}$$

Hai phương xác định bởi u_1 và u_2 trong (2.13) gọi là hai phương chính của đường bậc hai.

$$\begin{aligned} \tan u_1 . \tan u_2 &= \frac{t_1 t_2 - A(t_1 + t_2) + A^2}{B^2} \\ &= \frac{AC - B^2 - A(A+C) + A^2}{B^2} = -1 \end{aligned}$$

Như vậy hai phương chính là hai phương của hai trục tọa độ mới Ox' và Oy'.

- Nếu chọn u_1 là góc $\left(\widehat{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}}\right)$ tức là góc giữa hai vectơ đơn vị thuộc hai trục Ox và Ox' thì $A' = t_1$. Thật vậy theo (2.4) ta có:

$$\begin{aligned} A' &= A\cos^2 u_1 + 2B\cos u_1 \sin u_1 + C\sin^2 u_1 \\ &= (A\cos u_1 + B\sin u_1)\cos u_1 + (B\cos u_1 + C\sin u_1)\sin u_1 \\ &= t_1 \cos^2 u_1 + t_2 \sin^2 u_2 = t_1 \end{aligned}$$

Lưu ý: từ (2.11) ta suy ra:

$$\frac{A\cos u_1 + B\sin u_1}{\cos u_1} = \frac{B\cos u_1 + C\sin u_1}{\sin u_1} = t_1$$

Ta có nhận xét rằng $A + C = A' + C' = t_1 + t_2$ và $A' = t_1$ nên $C' = t_2$.

- Nếu chọn u_2 là góc $\left(\widehat{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}}\right)$ thì chứng minh tương tự ta có $A' = t_2$ và $C' = t_1$.

Trường hợp $\Delta = (A-C)^2 + B^2 = 0$, nghĩa là $A = C$ và $B = 0$. Trong trường hợp này đường bậc hai là đường tròn.

Nếu đường bậc hai không phải là đường tròn, nghĩa là phương trình đặc trưng (2.12) có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2. Ta có nhận xét t_1 và t_2 không đồng thời bằng 0, do đó ta sẽ xét hai trường hợp.

1. Trường hợp t_1 và t_2 đều khác 0. Qua phép quay phương trình (2.1) biến thành phương trình (2.3). Bây giờ ta xét phép tịnh tiến về gốc tọa độ O về gốc I biết rằng tọa độ của I trong hệ trục $Ox'y'$ là (a,b):

$$\begin{cases} x' &= x'' + a \\ y' &= y'' + b \end{cases}$$

Thay x', y' từ công thức trên vào phương trình (2.3) ta được phương trình của đường bậc hai trong hệ trục tọa độ $Ix''y''$ là:

$$f''(x,y) = A''x''^2 + C''y''^2 + 2D''x'' + 2E''y'' + F'' = 0 \quad (2.14)$$

trong đó:

$$\begin{aligned} A'' &= t_1 \\ C'' &= t_2 \\ D'' &= t_1 a + D' \\ E'' &= t_2 b + E' \\ F'' &= f'(a;b) \end{aligned}$$

Muốn cho phương trình (2.14) không còn hệ số bậc nhất ta cần tìm a và b sao cho:

$$\begin{cases} t_1 a + D' &= 0 \\ t_2 b + E' &= 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a &= -\dfrac{D'}{t_1} \\ \\ b &= -\dfrac{E'}{t_2} \end{cases}$$

Lúc này phương trình của đường bậc hai là:

$$t_1 x''^2 + t_2 y''^2 + F'' = 0$$

1. Nếu $F'' \neq 0$ phương trình đưa về dạng:

$$\frac{x''^2}{A} + \frac{y''^2}{B} = 1$$

Phương trình này biểu diễn một êlip, êlip ảo hay một hyperbol.

2. Nếu $F'' = 0$ phương trình đưa về dạng:

$$t_1 x''^2 + t_2 y''^2 = 0$$

Tuỳ theo t_1 và t_2 trái dấu (hay cùng dấu) phương trình trên một cặp đường thẳng thực (hay ảo) cắt nhau.

2. Trường hợp $t_1 = 0$ **hay** $t_2 = 0$**.** Giả sử $t_2 = 0$ khi đó phương trình (2.3) trở thành:

$$t_1 x'^2 + 2D'x + 2E'y' + F' = 0$$

① Nếu $E' \neq 0$ phương trình trên có thể được viết:

$$y' = \alpha x'^2 + \beta x' + \gamma$$

Hàm số bậc hai này biểu diễn một parabol, do đó đường bậc hai đã cho là một parabol.

② Nếu $E' = 0$ phương trình trên có thể được viết:

$$t_1 x'^2 + 2D'x + F' = 0$$

Phương trình bậc hai này có thể có hai nghiêm phức liên hợp, có nghiệm kép hoặc có hai nghiệm thực phân biệt. Khi đó đường bậc hai đã cho là một cặp đường thẳng (thực hoặc ảo liên hợp) song song hoặc trùng nhau.

2.2 Đưa phương trình đường bậc hai về dạng chính tắc

Giả sử ta có phương trình (2.1):

$$f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

Bước 1: Lập phương trình đặc trưng:

$$t^2 - (A+C)t + AC - B^2 = 0$$

Giả sử phương trình đặc trưng có hai nghiệm phân biệt khác 0 là t_1, t_2. Để định ý, ta luôn chọn $t_1 > t_2$. Tìm phương chính

$$\tan u_1 = \frac{t_1 - A}{B}$$

Ta chọn $-\frac{\pi}{2} \leqslant u_1 \leqslant \frac{\pi}{2}$, từ đó suy ra:

$$\cos u_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 u_1}} \quad ; \quad \sin u_1 = \tan u_1 . \cos u_1$$

Bước 2: Tính D', E' theo công thức:

$D' = D\cos u_1 + E\sin u_1$
$E' = -D\sin u_1 + E\cos u_1$ (lấy đạo hàm theo biến u_1)

Bước 3: Phương trình thu gọn:

$$t_1x'^2 + t_2y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F = 0$$

Tìm a, b theo công thức:

$$a = -\frac{D'}{t_1} \quad ; \quad b = -\frac{E'}{t_2}$$

Phương trình thu gọn trở thành phương trình:

$$t_1(x' - a)^2 + t_2(y' - b)^2 = a^2t_1 + b^2t_2 - F$$

Nếu $a^2t_1 + b^2t_2 - F \neq 0$ ta đưa phương trình trên về dạng chính tắc:

$$\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} = 1$$

Thông thường đáp số là êlip hoặc hyperbol.

■ **Ví dụ 2.2** Đưa phương trình đường bậc hai sau đây về dạng chính tắc:

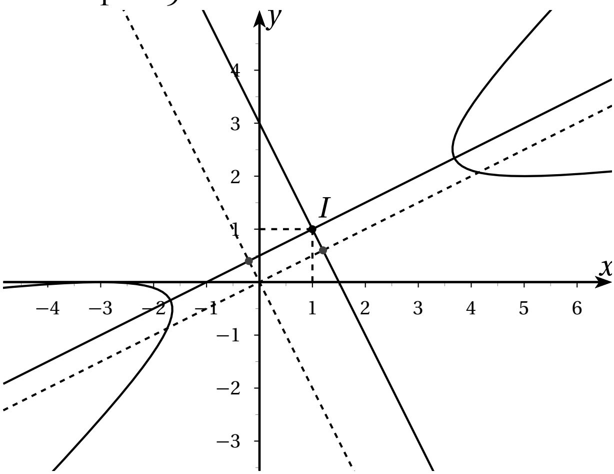
$$x^2 - 8xy + 7y^2 + 6x - 6y + 9 = 0$$

■

- Phương trình đặc trưng:
  $t^2 - 8t - 9 = 0 \Longleftrightarrow t_1 = 9 \; ; \; t_2 = -1.$
- Phương chính: $\tan u_1 = \dfrac{t_1 - A}{B} = -2$, chọn $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant u_1 \leqslant 0$ ta suy ra:

$$\cos u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad ; \quad \sin u_1 = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

- Tính $D' = D\cos u_1 + E\sin u_1 = 3 \times \frac{1}{\sqrt{5}} - 3 \times \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{9}{\sqrt{5}}$
$$\Rightarrow a = -\frac{D'}{t_1} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$
- $E' = -D\sin u_1 + E\cos u_1 = -3 \times \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - 3 \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$
$$\Rightarrow b = -\frac{E'}{t_2} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$
- Phương trình chính tắc: $9(x'-a)^2 - (y'-b)^2 + 9 = 0$
hay: $\frac{X^2}{1} - \frac{Y^2}{9} = -1$



■ **Ví dụ 2.3** Đưa phương trình đường bậc hai sau đây về dạng chính tắc:

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 11 = 0$$

■

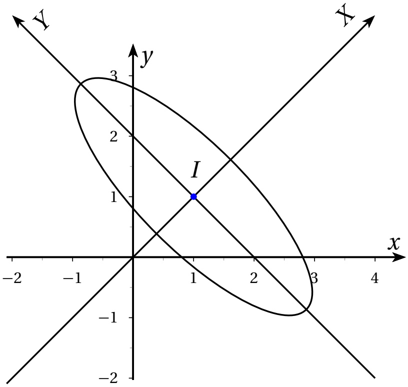
- Phương trình đặc trưng:
$t^2 - 10t + 9 = 0 \Longleftrightarrow t_1 = 9\ ;\ t_2 = 1.$

- Phương chính: $\tan u_1 = \dfrac{t_1 - A}{B} = 1$, chọn $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant u_1 \leqslant 0$ ta suy ra:

$$\cos u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad \sin u_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

- Tính $D' = D\cos u_1 + E\sin u_1 == -9\sqrt{2} \Rightarrow a = -\dfrac{D'}{t_1} = \sqrt{2}$
- Tính $E' = -D\sin u_1 + E\cos u_1 = 0 \Rightarrow b = -\dfrac{E'}{t_2} = 0$
- Phương trình chính tắc: $9(x' - a)^2 + y'^2 = 7$
  hay

$$\frac{X^2}{\frac{7}{9}} + \frac{Y^2}{7} = 1$$



■ **Ví dụ 2.4** Đưa phương trình đường bậc hai sau đây về dạng chính tắc:

$$x^2 - 6xy + 9y^2 - 2x - 4y + 7 = 0$$ ■

- Phương trình đặc trưng: $t^2 - 10t = 0 \Longleftrightarrow t_1 = 10$; $t_2 = 0$
  (để định ý, ta qui ước $t_2 = 0$).
- Phương chính: $\tan u_1 = \dfrac{t_1 - A}{B} = -3$, chọn $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant u_1 \leqslant 0$ ta suy ra:

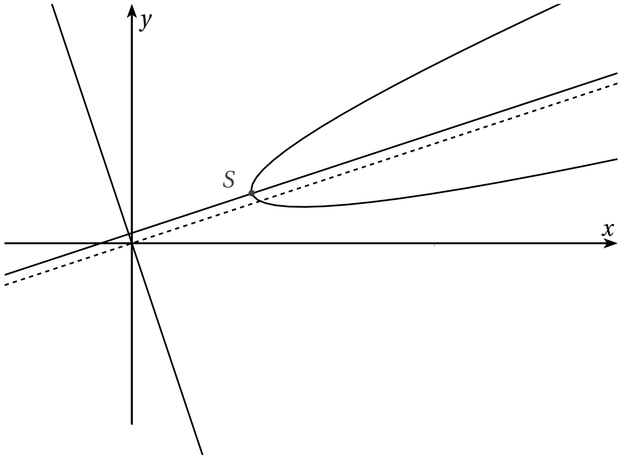
$$\cos u_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \quad ; \quad \sin u_1 = -\frac{3}{\sqrt{10}}$$

- Tính $D' = D\cos u_1 + E\sin u_1 = \dfrac{\sqrt{10}}{2} \Rightarrow a = -\dfrac{D'}{t_1} = -\dfrac{\sqrt{10}}{20}$
- Tính $E' = -D\sin u_1 + E\cos u_1 = -\dfrac{\sqrt{10}}{2} \Rightarrow b = \dfrac{F - a^2 t_1}{2E'} = -\dfrac{27}{4\sqrt{10}}$
- Phương trình chính tắc:

$$10x'^2 + \sqrt{10}x' - \sqrt{10}y' + 7 = 0 \Longleftrightarrow 10\left(x' - a\right)^2 - \sqrt{10}(y' - b) = 0$$

hay

$$X^2 = 2pY \qquad \text{với} \quad p = \frac{\sqrt{10}}{20}$$



■ **Ví dụ 2.5** Dựng đường bậc hai sau đây trong mặt phẳng Oxy:

$$9x^2 - 6xy + y^2 - 3x + y - 2 = 0$$

■

- Phương trình đặc trưng: $t^2 - 10t = 0 \Longleftrightarrow t_1 = 10$; $t_2 = 0$ (để định ý, ta qui ước $t_2 = 0$).
- Phương chính: $\tan u_1 = \dfrac{t_1 - A}{B} = -\dfrac{1}{3}$, chọn $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant u_1 \leqslant 0$ ta suy ra:
$$\cos u_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \sin u_1 = -\frac{\sqrt{3}}{6}$$
- Tính $E' = -D\sin u_1 + E\cos u_1 = 0$. Do đó ta dự đoán đường bậc hai là một cặp đường thẳng. Tính toán sơ cấp như sau:
$$y^2 - (6x-1)y + 9x^2 - 3x - 2 = 0$$
$\Delta = (6x-1)^2 - 4(9x^2 - 3x - 2) = 9$
Vậy phương trình đường bậc hai có thể được viết:
$$\left(y - \frac{6x-1+3}{2}\right)\left(y - \frac{6x-1-3}{2}\right) = 0$$

Do đó đồ thị của đường bậc hai là cặp đường thẳng song song:

$$y = 3x + 1 \quad ; \quad y = 3x - 2$$

2.3 Tiếp tuyến của ba đường cônic.

Định nghĩa 2.3.1

(1) Một đường bậc hai không phải là đường tròn và không suy biến thành một cặp đường thẳng (song song, trùng nhau hoặc cắt nhau) được gọi là một cônic. Ta có ba đường cônic: êlip, hyperbol và parabol.

(2) Một đường thẳng d được gọi là tiếp tuyến của conic nếu nó cắt conic tại hai điểm trùng nhau.

2. Phương trình tiếp tuyến.

Giả sử ta có một conic có phương trình (2.1):

$$f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (S)$$

và $M_0(x_0;y_0)$ là điểm nằm trên conic (S). Phương trình tham số của đường thẳng d qua M là:

$$\begin{cases} x &= x_0 + a_1 t \\ y &= y_0 + a_2 t \end{cases}$$

Thay phương trình tham số của d vào (2.1) ta được:

$$Pt^2 + 2Qt + R = 0 \tag{2.15}$$

trong đó:

$$P = Aa_1^2 + 2Ba_1a_2 + Ca_2^2$$
$$Q = a_1.\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0) + a_2.\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)$$
$$R = f(x_0,y_0) = 0$$

① Nếu d là tiếp tuyến của (L) thì $P \neq 0$ và phương trình (2.15) có ngiệm kép $t_1 = t_2 = 0$. Từ đó suy ra $Q = 0$ hay:

$$a_1.\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0) + a_2.\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) = 0 \tag{2.16}$$

② Ngược lại nếu $Q = 0$ thì $P \neq 0$ và phương trình (2.15) có nghiệm kép $t_1 = t_2 = 0$.

Do đó d là tiếp tuyến của (L) khi và chỉ khi $Q = 0$.

Giả sử $M(x;y)$ là một điểm tùy ý trên tiếp tuyến d. Khi đó vectơ $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$ cùng phương với vectơ $\overrightarrow{d} = (a_1; a_2)$. Vậy phương trình (2.16) có thể được viết:

$$(x-x_0).\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0).\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) = 0 \tag{2.17}$$

Lưu ý phương trình (2.17) có thể đượcc viết:

$$Ax_0x + B(x_0y + y_0x) + Cy_0y + D(x_0 + x) + E(y_0 + y) + F = 0 \tag{2.18}$$

Phương trình (2.17) và (2.18) là phương trình tiếp tuyến của conic (L):

$$f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

riêng phương trình (2.18) còn gọi là *“’công thức tách đôi tọa độ.”*

3. Tiếp tuyến của conic xác định bởi phương trình chính tắc

Bằng cách chọn một hệ trục tọa độ thích hợp thông qua phép quay và phép tịnh tiến, phương trình chính tắc của ba đường cônic như sau:

① **Êlip**:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Áp dụng công thức (2.18) vào phương trình chính tắc của elip, ta có:

$$\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)=0$$

Khai triển và thu gọn ta được:

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1 \tag{2.19}$$

(2) **Hyperbol**:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Áp dụng công thức (2.18) vào phương trình chính tắc của elip, ta có:

$$\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)-\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)=0$$

Khai triển và thu gọn ta được:

$$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1 \tag{2.20}$$

(3) **Parabol**:

$$y^2=2px$$

Áp dụng công thức (2.18) vào phương trình chính tắc của elip, ta có:

$$p(x-x_0)-y_0(y-y_0)=0$$

Khai triển và thu gọn ta được:

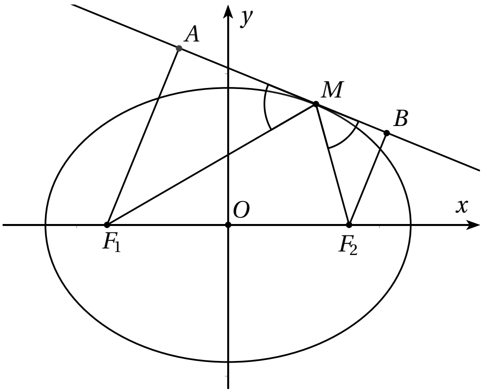
$$y_0y=p(x+x_0) \tag{2.21}$$

Các công thức (2.19) , (2.20) , (2.21) được gọi là các công thức *"tách đôi tọa độ"*.

2.3.1 Tính chất quang học của ba đường conic-Định lý Pascal.

Định lý 2.3.1

1. *Tiếp tuyến của một êlip (hoặc hyperbol) tạo với hai bán kính qua tiêu của tiếp điểm những góc bằng nhau.*
2. *Tiếp tuyến của một parabol tạo với bán kính qua tiêu của tiếp điểm và trục của parabol những góc bằng nhau.*



Chứng minh.

1. Giả sử $M(x_0; y_0)$ là một điểm nằm trên elip (E):
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$
Phương trình tiếp tuyến tại M là: $\dfrac{x_0}{a^2}x + \dfrac{y_0}{b^2}y = 1 \quad (d).$
Tọa độ của hai tiêu điểm là

$$F_1(-c;0)\ ;\ F_2(c;0)$$

với $c^2 = a^2 - b^2$, ở đây ta giả sử $a^2 > b^2$.
Ta có:

$$d(F_1, d) = \frac{\left|-\dfrac{cx_0}{a^2} - 1\right|}{\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}}} \quad ; \quad d(F_2, d) = \frac{\left|\dfrac{cx_0}{a^2} - 1\right|}{\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}}}$$

Suy ra:

$$\frac{d(F_1,d)}{d(F_2,d)} = \left|\frac{cx_0+a^2}{cx_0-a^2}\right| = \frac{\left|\frac{c}{a}x_0+a\right|}{\left|\frac{c}{a}x_0-a\right|} = \frac{a+ex_0}{a-ex_0} = \frac{MF_1}{MF_2}$$

Vậy góc tạo bởi tiếp tuyến tại M với hai bán kính qua tiêu MF_1, MF_2 là bằng nhau.

(2) Chứng minh tương tự cho hyperbol $(H): \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

(3) Giả sử $M(x_0;y_0)$ là một điểm nằm trên parabol (P): $y^2 = 2px$.
Phương trình tiếp tuyến tại M là: $p(x_0+x) - y_0y = 0 \quad (d)$.
Tọa độ tiêu điểm là $F\left(\frac{p}{2};0\right)$.
Giao điểm của d với trục hoành: $N(-x_0;0)$. Ta có nhận xét:

$$FN = \left|-x_0 - \frac{p}{2}\right| = x_0 + \frac{p}{2} = FM$$

Tam giác FMN cân tại F suy ra góc tạo bởi tiếp tuyến với trục của parabol bằng góc tạo bởi tiếp tuyến với bán kính qua tiêu.

2.4 Đường kính của ba đường cônic

Bài toán 2.1 Cho conic (S) với phương trình tổng quát (2.1):

$$f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

và vectơ $\overrightarrow{a} = (a_1;a_2)$. Tìm tập hợp trung điểm của các dây song song với nhau và có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{a}$.

Giải. Gọi $M(X;Y)$ là trung điểm của một dây tùy ý M_1M_2 trong các dây song song có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a}$.
Phương trình tham số của dây M_1M_2 là:

$$\begin{cases} x &= X + a_1t \\ y &= Y + a_2t \end{cases}$$

thay phương trình tham số trên vào (2.1) ta được:

$$Pt^2 + 2Qt + R = 0 \tag{2.22}$$

trong đó:

$$\begin{aligned}
P &= Aa_1^2 + 2Ba_1a_2 + Ca_2^2 \\
Q &= a_1.\frac{\partial F}{\partial x}(X,Y) + a_2.\frac{\partial F}{\partial y}(X,Y) \\
R &= f(X,Y)
\end{aligned}$$

Ta giả sử phương trình (2.22) có hai nghiệm $t_1;t_2$ ứng với hai điểm $M_1;M_2$. Khi đó tọa độ điểm M là $M\left(X + \frac{t_1+t_2}{2}a_1; Y + \frac{t_1+t_2}{2}a_2\right)$. Vì tọa độ của M là $(X;Y)$ và vì $a_1;a_2$ không đồng thời bằng 0 nên ta suy ra $t_1 + t_2 = 0 \Longleftrightarrow Q = 0$ hay:

$$a_1.\frac{\partial F}{\partial x}(X,Y) + a_2.\frac{\partial F}{\partial y}(X,Y) = 0$$

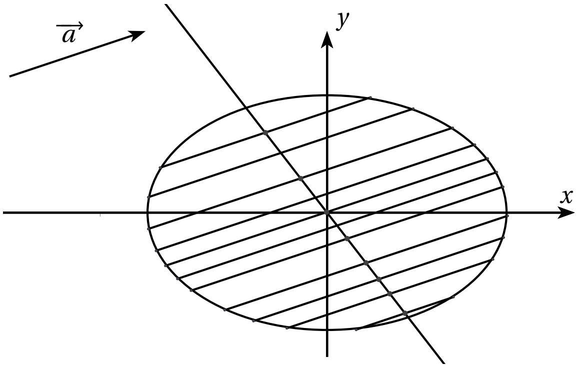
Ta kiểm tra được phương trình:

$$a_1.\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) + a_2.\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0$$

là phương trình của một đường thẳng mà ta gọi là *đường kính liên hợp với phương $\overrightarrow{d}$ của conic (S).*

1. Trường hợp êlip (E) có phương trình chính tắc:
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ thì phương trình đường kính liên hợp với phương $\overrightarrow{d}$ của êlip (E) là:

$$\frac{a_1}{a^2}x + \frac{a_2}{b^2}y = 0 \tag{2.23}$$



Ta có nhận xét rằng đường kính liên hợp với phương $\overrightarrow{a}$ của êlip (E) đi qua gốc tọa độ, tức là tâm đối xứng của êlip.
Nếu $a_1 \neq 0$ thì $k = \dfrac{a_2}{a_1}$ là hệ số góc của các dây song song có phương $\overrightarrow{a} = (a_1; a_2)$. Khi đó phương trình (2.23) được viết:

$$y = -\frac{a^2}{b^2.k}x$$

là đường thẳng có hệ số góc $k' = -\dfrac{b^2}{a^2k}$.
Ta có nhận xét

$$kk' = -\frac{b^2}{a^2} \tag{2.24}$$

do đó vai trò của k và k' là như nhau, nghĩa là:
Đường kính liên hợp với phương k có hệ số góc là k' thì đường kính liên hơp với phương k' sẽ có hệ số góc là k.
Hai đường kính có hệ số góc k và k' thỏa điều kiện (2.24) được gọi là *hai đường kính liên hợp*.

2 Trường hợp hyperbol (H) có phương trình chính tắc:
$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ thì phương trình đường kính liên hợp với phương $\overrightarrow{a}$ của hyperbol (H) là:

$$\frac{a_1}{a^2}x - \frac{a_2}{b^2}y = 0 \tag{2.25}$$

Ta có nhận xét rằng đường kính liên hợp với phương $\overrightarrow{d}$ của hyperbol (H) đi qua gốc tọa độ, tức là tâm đối xứng của hyperbol.
Nếu $a_1 \neq 0$ thì $k = \dfrac{a_2}{a_1}$ là hệ số góc của các dây song song có phương $\overrightarrow{d} = (a_1; a_2)$. Khi đó phương trình (2.25) được viết:

$$y = \frac{a^2}{b^2.k}x$$

là đường thẳng có hệ số góc $k' = \dfrac{b^2}{a^2k}$.
Ta có nhận xét

$$kk' = \frac{b^2}{a^2} \tag{2.26}$$

do đó vai trò của k và k' là như nhau, nghĩa là:
Đường kính liên hợp với phương k có hệ số góc là k' thì đường kính liên hơp với phương k' sẽ có hệ số góc là k.
Hai đường kính có hệ số góc k và k' thỏa điều kiện (2.26) được gọi là *hai đường kính liên hợp*.

3. Trường hợp parabol (P) có phương trình chính tắc:
$y^2 = 2px$ thì phương trình đường kính liên hợp với phương $\overrightarrow{d}$ của parabol (P) là:

$$ya_2 - pa_1 = 0 \tag{2.27}$$

lý luận như trên phương trình đường kính liên hợp với phương k là

$$y = \frac{p}{k}$$

là đường thẳng song song với trục Ox.

2.5 Tâm, phương tiệm cận và đường tiệm cận của đường bậc hai

2.5.1 Tâm của đường bậc hai.

Cho đường bậc hai (L) có phương trình (2.1):

$$f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

Điểm $I(x_0; y_0)$ được gọi là tâm của (L) nếu với mọi điểm M trên (L), điểm M' đối xứng của M qua I cũng nằm trên (L).

Tịnh tiến trục tọa độ về gốc I theo công thức:

$$\begin{cases} x & = x_0 + X \\ y & = y_0 + Y \end{cases}$$

Thay vào phương trình (2.1) ta có:

$$AX^2 + 2BXY + CY^2 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0)X + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0)Y + f(x_0; y_0) = 0 \tag{2.28}$$

Điểm có tọa độ $(-X; -Y)$ cũng nằm trên (L) do đó thỏa mãn phương trình (2.28), nghĩa là:

$$AX^2 + 2BXY + CY^2 - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0)X - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0)Y + f(x_0; y_0) = 0 \tag{2.29}$$

Cộng (2.28) và (2.29) ta suy ra:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0)X + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0)Y = 0$$

Vì đẳng thức đúng với mọi X, Y nên từ đó ta suy ra:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0) & = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0) & = 0 \end{cases}$$

Nói cách khác tọa độ của tâm (nếu có) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x;y) & = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x;y) & = 0 \end{cases} \tag{2.30}$$

Hệ phương trình trên tương đương với:

$$\begin{cases} Ax + By + D & = 0 \\ Bx + Cy + E & = 0 \end{cases} \tag{2.31}$$

1. Nếu $AC - B^2 \neq 0$ hệ phương trình (2.31) có nghiệm duy nhất. Trong trường hợp này ta nói (L) là đường bậc hai có tâm, nghiệm duy nhất nói trên chính là tọa độ của tâm. Trong tất cả các đường bậc hai, chỉ có ba đường bậc hai có tâm là:
   - êlip
   - hyperbol
   - cặp đường thẳng thực cắt nhau.
2. Nếu ma trận $\begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \end{pmatrix}$ có hạng bằng 1 thì hệ phương trình có vô số nghiệm. Ta nói (L) là đườg bậc hai có *vô số tâm*, đôi khi ta còn gọi (L) là đường bậc hai *vô tâm*. Trong tất cả các đường bậc hai, có hai đường bậc hai vô tâm là:
   - cặp đường thẳng thực song song
   - cặp đường thẳng thực trùng nhau
3. Nếu $AC - B^2 = 0$ và ma trận $\begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \end{pmatrix}$ có hạng bằng 2 thì hệ phương trình vô nghiệm. Trong trường hợp này (L) là đường bậc hai *không có tâm.* Chỉ có một đường bậc hai không có tâm, đó là parabol.

2.5.2 Phương tiệm cận.

Cho đường bậc hai (L) có phương trình (2.1):

$$f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

Vectơ $\overrightarrow{a} = (a_1; a_2)$ khác $\overrightarrow{0}$ được gọi là phương tiệm cận của (L) nếu tọa độ của nó thỏa điều kiện:

$$Aa_1^2 + 2Ba_1a_2 + Ca_2^2 = 0$$

Ta có nhận xét nếu $AC - B^2 > 0$ thì không có vectơ nào thỏa điều kiện trên.
Để tìm phương tiệm cận của (L) ta chỉ xét khi $AC - B^2 < 0$. Trong trường hợp này, (L) là hyperbol hoặc một cặp đường thẳng cắt nhau.

■ **Ví dụ 2.6** Xác định phương tiệm cân của đường bậc hai (L):

$$6xy - 8y^2 + 12x - 26y - 11 = 0$$

■

Giải. Ta tìm các số a_1, a_2 không đồng thời bằng 0 sao cho

$$6a_1a_2 - 8a_2^2 = 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ll} a_2 & = 0 \Rightarrow a_1 \neq 0 \;\text{ chọn } a_1 = 1 \\ a_2 & = \frac{3}{4}a_1 \;\text{ chọn } a_1 = 4 \Rightarrow a_2 = 3 \end{array}\right.$$

Vậy (L) có hai đường tiệm cận là:

$$\overrightarrow{a_1} = (1;0) \quad ; \quad \overrightarrow{a_2} = (4;3)$$

2.5.3 Đường tiệm cận của hyperbol.

Đường tiệm cận của hyperbol (H) là đường thẳng đi qua tâm và có phương là phương tiệm cận. Như vậy hyperbol có hai đường tiệm cận. Dưới dạng phương trình chính tắc:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

hai đường tiệm cận của hyperbol là:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

hay:

$$bx \pm ay = 0$$

① Ta chứng minh được đường bậc hai (L) với phương trình tổng quát:

$$f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

là:

- hyperbol khi và chỉ khi $I_2 < 0$ và $I_3 \neq 0$
- một cặp đường thẳng cắt nhau khi và chỉ khi $I_2 < 0$ và $I_3 = 0$

với

$$I_2 = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 \quad \text{và} \quad I_3 = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

② Nếu đường bậc hai có phương trình (2.1) nói trên là hyperbol thì phương trình hai đường tiệm cận của nó là:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = \frac{I_3}{I_2}$$

③ Nếu (H) nhận hai đường thẳng cắt nhau

$$ax + by + c = 0 \ ; \ a'x + b'y + c' = 0$$

làm hai đường tiệm cận thì phương trình tổng quát của nó có dạng:

$$(ax + by + c)(a'x + b'y + c') + k = 0 \text{ với } k \neq 0$$

Thật vậy, khai triển và thu gọn phương trình trên ta được:

$$aa'x^2+(ab'+a'b)xy+bb'y^2+(ac'+c'a)x+(b'c+c'b)y+cc'+k=0 \tag{2.32}$$

Đặt:
$A=aa', 2B=ab'+a'b, C=bb', 2D=ac'+a'c, 2E=bc'+c'b, F=cc'+k$
Ta tính:

$$I_2=AC-B^2=-\left(\frac{1}{4}a^2b'^2+\frac{1}{4}a'^2b^2-\frac{1}{2}aa'bb'\right)= \\ =-\frac{1}{4}\left(ab'-a'b\right)^2<0$$

$$I_3=\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}=\underbrace{\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & cc' \end{vmatrix}}_{=0}+\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ 0 & 0 & k \end{vmatrix}=kI_2\neq 0$$

Vậy phương trình (2.32) biểu diễn một hyperbol. Dễ dàng kiểm tra các vectơ chỉ phương của hai đường thẳng đã cho là các phương tiệm cận của (H). Ngoài ra tọa độ tâm I của (H) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} Ax+By+D & =0 \\ Bx+Cy+E & =0 \end{cases}$$

Ta có nhận xét: hệ phương trình trên cũng chính là hệ phương trình xác định tâm của đường bậc hai:

$$(ax+by+c)(a'x+b'y+c')=0$$

nghĩa là giao điểm của hai đường thẳng đã cho chính là tâm của (H).

Tóm lại ta đã chứng minh được:

Nếu (H) nhận hai đường thẳng cắt nhau

$$ax+by+c=0 \; ; \; a'x+b'y+c'=0$$

làm hai đường tiệm cận thì phương trình tổng quát của nó có dạng:

$$(ax+by+c)(a'x+b'y+c')+k=0 \text{ với } k \neq 0$$

2.6 Đỉnh, tiêu điểm, trục và đường chuẩn của parabol.

Giả sử ta có một parabol (P) có phương trình (2.1):

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

với $AC=B^2$. Như vậy A và C cùng dấu, do đó ta có thể giả sử chúng cùng dương.

(1) Qua phép quay, phương trình (2.1) biến thành phương trình:

$$(A+C)x'^2+2D'x'+2E'y'+F=0 \tag{2.33}$$

Vì $A+C \neq 0$ phương trình có thể được viết:

$$\left(x'+\frac{D'}{A+C}\right)^2+\frac{2E'}{A+C}\left(y'+\frac{F}{2E'}-\frac{D'^2}{A+C}\right)=0$$

Đặt $X=x'+\dfrac{D'}{A+C}$; $p=-\dfrac{E'}{A+C}$; $Y=y'+\dfrac{F}{2E'}-\dfrac{D'^2}{A+C}$

Phương trình trở thành: $X^2=2pY$. Như vậy phương trình trục đối xứng của parabol là: $X=0 \Longleftrightarrow x'+\dfrac{D'}{A+C}=0$.

Lưu ý các công thức tính x' và D' ở (2.2) và (2.7) ta có:

$$x' = x\cos u + y\sin u \quad ; \quad D' = D\cos u + E\sin u$$

với $\cos^2 u = \dfrac{A}{A+C} \quad ; \quad \sin^2 u = \dfrac{C}{A+C}$. Khi đó

$$\cos u = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A+C}} \quad ; \quad \sin u = \pm\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{A+C}}$$

Chọn dấu + nếu $B > 0$ và chọn dấu − nếu $B < 0$.

Từ đó ta suy phương trục đối xứng của parabol như sau:

$$x\sqrt{A} \pm y\sqrt{C} + \frac{D\sqrt{A} \pm E\sqrt{C}}{A+C} = 0 \tag{2.34}$$

Chọn dấu + nếu $B > 0$ và chọn dấu − nếu $B < 0$.

(2) Đỉnh của parabol là giao điểm của parabol với trục đối xứng của nó. Về mặt mặt đại số, đỉnh của parabol có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F & = 0 \\ x\sqrt{A} \pm y\sqrt{C} + \dfrac{D\sqrt{A} \pm E\sqrt{C}}{A+C} & = 0 \end{cases}$$

(Vì hệ này cho ta một nghiệm duy nhất nên dễ dàng tìm được nghiệm đó bằng máy tính cầm tay.)

(3) Người ta chứng minh được tiêu điểm của parabol

$$f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

là giao điểm của hai đường thẳng Flucker. Mỗi đường thẳng Flucker có phương trình sau:

$$(f'_x(x,y))^2 - (f'_y(x,y))^2 = 4(A-C)f(x,y) \tag{2.35}$$

$$f'_x(x,y).f'_y(x,y) = 2Bf(x,y) \tag{2.36}$$

Khai triển phương trình (2.35) với lưu ý $B^2 = AC$ ta được:

$$(BE - CD)x + (AE - BD)y + \frac{1}{2}\left(AF - D^2 + CF - E^2\right) = 0$$

Để dễ nhớ ta nhìn vào định thức I_3 ở trên *(hoặc nhắc lại ở dưới)* và ghi lại phương trình đường thẳng Flucker thứ nhất như sau:

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$
$$\to \begin{vmatrix} B & D \\ C & E \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} A & D \\ B & E \end{vmatrix} y + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} A & D \\ D & F \end{vmatrix} - \frac{1}{2}\begin{vmatrix} C & E \\ E & F \end{vmatrix} = 0$$

Tương tự, phương trình (2.36) có thể tính toán và thu gọn như sau:

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} A & D \\ B & E \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} B & D \\ C & E \end{vmatrix} y - \begin{vmatrix} B & D \\ E & F \end{vmatrix} = 0$$

Lưu ý: *hai đường thẳng Flucker vuông góc với nhau nên phần chữ rất dễ nhớ.*

4 Đường chuẩn của parabol là đường đối cực của tiêu điểm. Phương trình đường đối cực của một điểm đối với một conic cho bởi công thức *"tách đôi tọa độ."*

■ **Ví dụ 2.7** Cho đường bậc hai (S) có phương trình:

$$x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 6 = 0$$

Chứng minh rằng đường bậc hai là một parabol. Hãy xác định tọa độ tiêu điểm và viết phương trình đường chuẩn của parabol. ■

Giải: Ta tính

$$I_2 = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ ;$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -6 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$$

Vậy (S) là một parabol.
Tọa độ tiêu điểm của parabol là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} y + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} - \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} & = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} y - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} & = 0 \end{cases}$$

hay: $$\begin{cases} 2x + 2y - 1 & = 0 \\ 3x - 3y + 4 & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = -\dfrac{5}{12} \\ y & = \dfrac{11}{12} \end{cases}$$

Phương trình đường chuẩn của parabol cho bởi công thức *"tách đôi tọa độ:"*

$$x_0 x + (x_0 y + y_0 x) + y_0 y - 2(x_0 + x) + (y_0 + y) - 6 = 0$$

Khai triển và thu gọn: $\qquad 6x - 6y + 17 = 0$

2.7 Phân loại đường bậc hai

Để phân loại đường bậc hai dựa vào các hệ số A, B, C, D, D, E, F ta đặt:

$$I_1 = A + C \; ; \; I_2 = AC - B^2 \; ; \; I_3 = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

Ta tính F'' trong công thức (2.14)

$$
\begin{aligned}
F'' &= f'(a,b) = t_1.a^2 + t_2 b^2 + 2D'.a + 2E'.b + F = -\frac{D'^2}{t_1} - \frac{E'^2}{t_2} + F \\
&= \frac{F t_1 t_2 - (D\cos u + E\sin u)^2 t_2 - (E\cos u - D\sin u)^2 t_1}{t_1 t_2} \\
&= \frac{F(AC - BD)}{I_2} - \\
&- \frac{(\alpha + \beta\cos 2u + DE\sin 2u).(p + q\cos 2u - B\sin 2u)}{I_2} - \\
&- \frac{(\alpha - \beta\cos 2u - DE\sin 2u).(p - q\cos 2u + B\sin 2u)}{I_2} \\
&= \frac{F(AC - B^2) - E(AE - BD) + D(DE - CD)}{I_2} \\
&= \frac{I_3}{I_2} \quad \text{với} \quad \alpha = \frac{D^2 + E^2}{2}\ ;\ \beta = \frac{D^2 - E^2}{2}\ ; p = \frac{C + A}{2}\ ; q = \frac{C - A}{2}
\end{aligned}
$$

Như vậy ta có bảng phân loại đường bậc hai sau đây:

Dấu hiệu 1	*Dấu hiệu 2*	*Tên đường*
$I_2 = 0$	$I_3 \neq 0$	parabol
$I_2 = 0$	$I_3 = 0$	cặp đường thẳng thực (hoặc ảo) song song, hoặc cặp đường thẳng thực trùng nhau
$I_2 > 0$	$I_3 < 0$	êlip
	$I_3 > 0$	êlip ảo
	$I_3 = 0$	cặp đường thẳng ảo cắt nhau
$I_2 < 0$	$I_3 \neq 0$	hyperbol
	$I_3 = 0$	cặp đường thẳng thực cắt nhau

Để dễ nhớ, đối với ba đường conic: *Nếu* $I_2 < 0$ *ta có hyperbol,* $I_2 > 0$ *ta có êlip và* $I_2 = 0$ *ta có parabol.*

BÀI TẬP

Bài tập 2.1 Một đường bậc hai đi qua điểm $A(1;-1)$ và nhận các đường thẳng $2x+3y-5=0$; $5x+3y-8=0$ làm các đường tiệm cận. Lập phương trình đường bậc hai đó. ■

Bài tập 2.2 Lập phương trình đường bậc hai tiếp xúc với đường thẳng $4x+y+5=0$ và nhận các đường thẳng $x-1=0$; $2x-y+1=0$ làm các đường tiệm cận. ■

Bài tập 2.3 Lập phương trình hyperbol qua các điểm $A(2,1);B(-1,-2);$ $C\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)$ và một trong hai đường tiệm cận của nó trùng với trục Ox. ■

Bài tập 2.4 Lập phương trình hyperbol qua các điểm $A(1,1)$, tiếp xúc với trục hoành tại điểm $B(3;0)$ và nhận trục tung làm một trong hai đường tiệm cận. ĐS: $x^2-4xy-6x+9=0$. ■

Bài tập 2.5 Lập phương trình hyperbol nhận hai đường thẳng $x-1=0$ và $2x-y+1=0$ làm hai đường tiệm cận và tiếp xúc với đường thẳng $4x+y+5=0$. ĐS: $2x^2-xy-x+y+5=0$. ■

Bài tập 2.6 Một đường bậc hai đi qua các điểm $O(0;0);A(0;2);B(2;4)$ và chỉ cắt các đường thẳng sau: $3x-2y+1=0$; $2x+y-5=0$ tại một điểm. Lập phương trình của đường bậc hai đó. ■

Bài tập 2.7 Một đường bậc hai có tâm $I(0;-1)$, đi qua điểm $B(3;0)$ và chỉ cắt các đường thẳng $2x-3y+1=0$; $x+y-5=0$ tại một điểm. Lập phương trình của đường bậc hai đó. ■

Bài tập 2.8 Một đường bậc hai đi qua các điểm $A(0;1), B(1;0), O(0;0)$ và có tâm $I(2;3)$. Lập phương trình của đường bậc hai. ■

Bài tập 2.9 Lập phương trình đường bậc hai đi qua 5 điểm $O(0;0), A(0;2), B(-1;0), C(-2;1), D(-1;3)$ ■

Bài tập 2.10 Lập phương trình đường bậc hai đi qua 5 điểm $E(-2;-3), A(1;0), B(3;1), C(0;3), D(-4;-1)$ ■

Bài tập 2.11 Lập phương trình của một parabol đi qua 4 điểm: $A(0;15), B(3;0), C(5;0), D(2;3)$ ■

Bài tập 2.12 Lập phương trình của một parabol tiếp xúc với trục Ox tại điểm $A(3;0)$ và tiếp xúc với trục Oy tại điểm $B(0;5)$. ■

Bài tập 2.13 Lập phương trình của một đường bậc hai qua gốc tọa độ, tiếp xúc với đường thẳng $4x+3y+2=0$ tại điểm $A(1;-2)$ và với đường thẳng $x-y-1=0$ tại điểm $B(0;-1)$. ■

Bài tập 2.14 Tìm tâm, phương tiệm cận và đường tiệm cận của đường bậc hai $8x^2+6xy-26x-12y+11=0$. ■

Bài tập 2.15 Xác định giao điểm của đường bậc hai
$x^2 - 2xy - 3y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ với đường thẳng $x + 4y - 1 = 0$. ■

Bài tập 2.16 Tìm điều kiện cần và đủ để đường thẳng $Ax + By + C = 0$ tiếp xúc với đường bậc hai:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

(qui ước: $a_{ij} = a_{ji}\ \forall i, j$)

ĐS:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & A \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & B \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & C \\ A & B & C & 0 \end{vmatrix} = 0$$

■

Bài tập 2.17 Cho đường bậc hai (S) có phương trình:

$$x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 6 = 0$$

1. Chứng minh rằng (S) là một parabol (P).
2. Tìm tập hợp những điểm mà từ đó vẽ được hai tiếp tuyến vuông góc đến parabol nói trên.

Hướng dẫn: Giả sử $M(X;Y)$ là điểm cần tìm quĩ tích. Phương trình hai đường thẳng qua M và vuông góc với nhau là:

$d1 : Ax + By - AX - BY = 0 \quad ; \quad d_2 : Bx - Ay + AY - BX = 0$

d_1 tiếp xúc với (P) khi và chỉ khi:

$$-6BAX - 6B^2Y + 10B^2 + 6A^2X + 6ABY - 8BA + 7A^2 = 0 \quad (1)$$

d_2 tiếp xúc với (P) khi và chỉ khi:

$$6BAX - 6A^2Y + 10A^2 + 6B^2X - 6ABY + 8BA + 7B^2 = 0 \quad (2)$$

Cộng (1) và (2) và chia hai vế của kết quả cho $A^2 + B^2$ ta có:

$$6X + 6Y - 17 = 0$$

Vậy quĩ tích cần tìm là đường thẳng $6x + 6y - 17 = 0$. *Đường thẳng này chính là đường chuẩn của parabol.* ■

Bài tập 2.18 Viết phương trình các tiếp tuyến của đường bậc hai $2x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 6y - 3 = 0$ đi qua điểm $A(3;4)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai tiếp điểm của các tiếp tuyến trên. ■

Bài tập 2.19 Cho đường bậc hai:
$x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 6y = 0$ (S) và đường thẳng $d : 3x - y + 6 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến tại các giao điểm của d và (S) và tìm giao điểm của hai tiếp tuyến đó. ■

Bài tập 2.20 Tìm 2 đường kính liên hợp với đường bậc hai:
$C) : x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ biết rằng một đường kính đi qua gốc tọa độ. ■

Bài tập 2.21 Tìm đường kính liên hợp của conic:

$$2x^2 - 6xy + 9y^2 - 12x + 14y - 7 = 0$$

biết rằng nó hợp với đường kính liên hợp của nó góc $\frac{\pi}{4}$. ■

Bài tập 2.22 Lập phương trình đường kính của đường bậc hai

$$2x^2+4xy+5y^2-8x+6=0$$

song song với đường thẳng $d: 2x-y+5=0$. ■

Bài tập 2.23 Đưa phương trình các đường bậc hai sau về dạng chính tắc:
a) $3x^2-2xy+3y^2+4x+4y-4=0$
b) $5x^2+12xy-22x-12y-19=0$
c) $x^2+6xy+y^2+6x+2y-1=0$
d) $4x^2-12xy+9y^2-2x+3y-2=0$
c) $x^2-2xy+y^2-4x-6y+3=0$
d) $x^2-2xy-2y^2-4x-6y-\dfrac{13}{3}=0$ ■

Bài tập 2.24 Viết phương trình các đường tiệm cận của các hyperbol sau:
1. $3x^2+7xy+4y^2+5x+2y-6=0$
2. $2x^2+6xy-12x-18y+5=0$

■

Bài tập 2.25 Viết phương trình của một parabol đi qua điểm $(0;1)$ nhận đường thẳng $x-2y=0$ làm một đường kính và tiếp xúc với đường thẳng $x+y=0$ tại giao điểm của đường kính nói trên với parabol.
ĐS: $x^2-4xy+4y^2-4x-4y=0$ ■

Bài tập 2.26 Cho đường bậc hai $(S): 6xy-8y^2+12x-26y-11=0$ trong mặt phẳng Oxy.
a) Chứng minh rằng (S) là một hyperbol. Xác định tâm và các đường

tiệm cận của nó.
b) Tìm hai phương chính của đường và viết phương trình chính tắc của (S).
■

Bài tập 2.27 Cho đường bậc hai $(S): x^2+2xy+y^2-4x+2y-6=0$ trong mặt phẳng Oxy.
a) Chứng minh rằng (S) là một parabol. Xác định đỉnh, trục đối xứng, tiêu điểm và đường chuẩn của nó.
b) Viết phương trình chính tắc và vẽ (S) trong mặt phẳng Oxy. ■

Bài tập 2.28 Cho đường bậc hai $(S): x^2+4xy+4y^2+8x+6y+2=0$ trong mặt phẳng Oxy.
a) Chứng minh rằng (S) là một parabol..
b) Tìm hai phương chính của đường và viết phương trình chính tắc của (S). Từ đó vẽ (S) trong hệ trục tọa độ Oxy. ■

Bài tập 2.29 Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2(t^2-3t+1)x-2(t^2+2t)y+t = 0$
với t là tham số.
Tìm quĩ tích tâm của họ đường tròn nói trên. Chứng minh rằng quĩ tích là một parabol. Hãy tìm tọa độ đỉnh, tiêu điểm và viết phương trình truc đối xứng và đường chuẩn của parabol nói trên. ■

Bài tập 2.30 Với giá trị nào của m thì phương trình

$$mx^2+4xy-9y^2+2mx-6y+1=0$$

xác định một cặp đường thẳng thực cắt nhau trong mặt phẳng Oxy.

Hướng dẫn: $I_2 = \begin{vmatrix} m & 2 \\ 2 & -9 \end{vmatrix} = -9m-4$

$I_3 = \begin{vmatrix} m & 2 & m \\ 2 & -9 & -3 \\ m & -3 & 1 \end{vmatrix} = -30m-4+9m^2$

ycbt $\Longleftrightarrow \begin{cases} I_2 & <0 \\ I_3 & =0 \end{cases} \Longleftrightarrow m = \dfrac{5}{3} \pm \dfrac{\sqrt{29}}{3}$ ■

Bài tập 2.31 Tìm quỹ tích tâm của tất cả những đường cong có phương trình:

$$(C) : x^2+2xy-y^2-2mx+4my+1=0$$

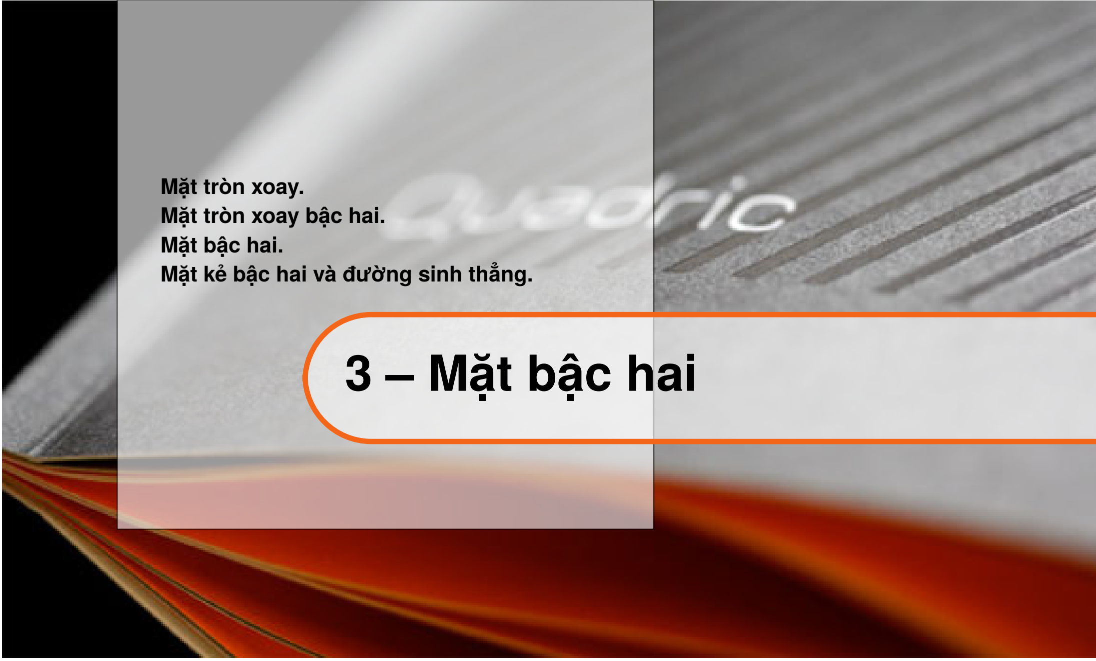
trong đó m là tham số. ■

Bài tập 2.32 Tìm quỹ tích tâm của tất cả những đường cong bậc hai (C) đi qua bốn điểm $O(0;0); A(2;0); B(0;1); C(1;2)$. ■

Bài tập 2.33 Cho một conic có phương trình:

$$(S) : mx^2+2xy+my^2+2mx-2my=0$$

với m là tham số. Xác định m để (S) là đường bậc hai có tâm và tìm quĩ tích tâm của conic (S) khi m thay đổi. ■



3 – Mặt bậc hai

3.1 Mặt tròn xoay.

Định nghĩa 3.1.1 *Mặt tròn xoay là mặt tạo bởi một đường quay một vòng xung quanh một trục.*

Từ định nghĩa ta suy ra nếu cắt mặt tròn xoay bằng một mặt phẳng vuông góc với trục thì ta được thiết diện là một đường tròn có tâm trên trục.

3.1.1 Phương trình chính tắc.

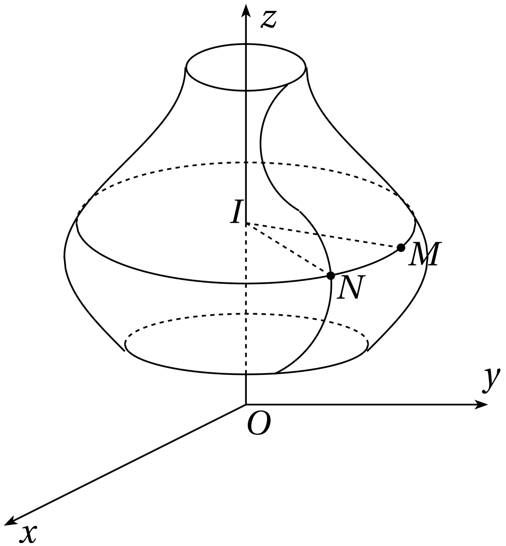
Giả sử trong không gian $Oxyz$ cho một đường ℓ xác định bởi hệ phương trình:

$$\begin{cases} x &= f(z) \\ y &= g(z) \end{cases}$$

Ta quay đường ℓ một vòng xung quanh trục Oz. Hãy tìm phương trình của mặt tròn xoay (π) tạo thành.

Đường ℓ gọi là đường sinh của mặt tròn xoay (π).

- Giả sử $M(X;Y;Z)$ là điểm tùy ý trên mặt tròn xoay (π). Qua M ta dựng một mặt phẳng vuông góc với trục Oz cắt mặt tròn xoay (π) theo một đường tròn tâm I thuộc trục Oz và cắt đường ℓ tại điểm $N(x;y;z)$.



Ta có $IM^2 = X^2 + Y^2$ và $IN^2 = x^2 + y^2$.Vì M cùng nằm trên đường tròn tâm I nên $IM = IN$ suy ra: $X^2 + Y^2 = x^2 + y^2$.

Điểm $N(x;y;z)$ nằm trên mặt phẳng $z = Z$ nên:

$$\begin{cases} x^2 & = f^2(z) = f^2(Z) \\ y^2 & = g^2(z) = g^2(Z) \end{cases}$$

Vậy:

$$X^2 + Y^2 = f^2(Z) + g^2(Z) \tag{3.1}$$

- Ngược lại nếu điểm M có tọa độ $(X;Y;Z)$ thoả3 mãn phương trình (3.1). Qua M dựng mặt phẳng vuông góc với trục Oz cắt trục Oz ở I và cắt đường ℓ ở điểm $N(x;y;z)$. Ta có $z = Z$, ngoài ra:

$$IN^2 = x^2 + y^2 = f^2(Z) + g^2(Z) = X^2 + Y^2 = IM^2$$

Vậy điểm M nằm trên mặt tròn xoay (π).

Tóm lại phương trình của mặt tròn xoay (π) do đường ℓ quay một vòng xung quanh trục Oz là:

$$x^2 + y^2 = f^2(z) + g^2(z) \tag{3.2}$$

Tương tự phương trình của mặt tròn xoay tạo thành khi quay một đường xung quanh trục Ox và Oy lần lượt là:

$$y^2 + z^2 = f_1^2(x) + g_1^2(x) \tag{3.3}$$

$$x^2 + z^2 = f_2^2(y) + g_2^2(y) \tag{3.4}$$

3.2 Mặt tròn xoay bậc hai.

Định nghĩa 3.2.1 Mặt tròn xoay bậc hai là mặt tạo bởi một đường bậc hai quay một vòng xung quanh một trục đối xứng của nó.

3.2.1 Êlipxoit tròn xoay.

Trong không gian $Oxyz$ cho êlip nằm trong mặt phẳng Oxy nhận hai trục Ox, Oy làm hai trục đối xứng có phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} & = 1 \\ z & = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

Quay êlip một vòng xung quanh trục Ox ta được một mặt tròn xoay và gọi là êlipxoit tròn xoay trục Ox.

Từ phương trình (3.5) ta suy ra:

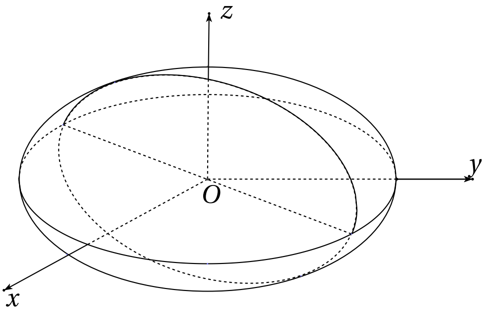
$$\begin{cases} y^2 & = b^2\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right) \\ z^2 & = 0 \end{cases}$$

Cộng hai phương trình trên vế với vế ta được:

$$y^2 + z^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

hay:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (3.6)$$



Tương tự phương trình của một êlipxoit tròn xoay trục Oy do ta quay êlip (3.5) một vòng xung quanh trục Oy là:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1 \quad (3.7)$$

3.2.2 Hyperboloit tròn xoay.

Trong không gian $Oxyz$ cho hyperbol nằm trong mặt phẳng Oxy nhận hai trục Ox, Oy làm hai trục đối xứng có phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} & = 1 \\ z & = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

a) Quay hyperbol một vòng xung quanh trục thực của nó ta được một mặt tròn xoay và gọi là hyperboloit tròn xoay hai tầng.

Từ phương trình (3.8) ta suy ra:

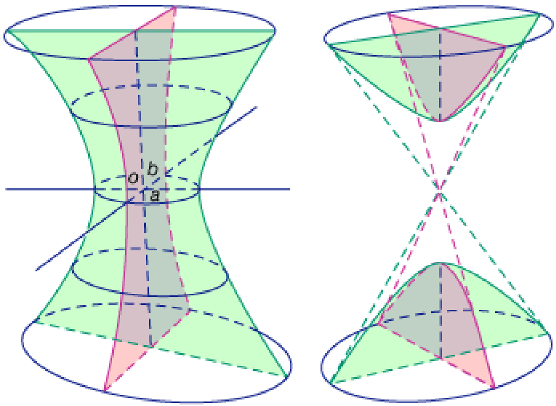
$$\begin{cases} y^2 & = b^2\left(\dfrac{x^2}{a^2} - 1\right) \\ z^2 & = 0 \end{cases}$$

Cộng hai phương trình trên vế với vế ta được:

$$y^2 + z^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)$$

hay:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 \tag{3.9}$$



b) Tương tự phương trình của một *hyperboloit tròn xoay trục một tầng* do ta quay êlip (3.8) một vòng xung quanh trục ảo của nó là:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1 \tag{3.10}$$

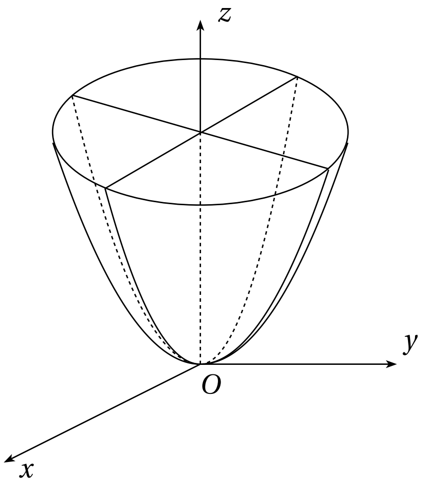
3.2.3 Paraboloit tròn xoay.

Quay parabol

$$\begin{cases} y^2 & = 2pz \\ x & = 0 \end{cases}$$

xung quanh trục đối xứng của nó là trục Oz ta nhận được một mặt gọi là mặt *paraboloit tròn xoay*. Phương trình của paraboloit tròn xoay là:

$$x^2 + y^2 = 2pz$$



5. Các mặt tròn xoay khác.

1. **Mặt nón tròn xoay.** Trong không gian $Oxyz$ xét một cặp đường thẳng cắt nhau tại gốc tọa độ, nằm trong mặt phẳng Oxy có phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} & = 0 \\ z & = 0 \end{cases} \tag{3.11}$$

Quay cặp đường thẳng này một vòng xung quanh trục Ox, ta được một mặt là *mặt nón tròn xoay trục Ox*. Phương trình của mặt này là:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0$$

Tương tự quay cặp đường thẳng (3.11) này một vòng xung quanh trục Oy, ta được một mặt là *mặt nón tròn xoay trục Oy*. Phương trình của mặt này là:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 0$$

② **Mặt trụ tròn xoay.** Trong không gian $Oxyz$ xét một cặp đường thẳng song song với trục Oy, nằm trong mặt phẳng Oxy và cách đều trục ấy, có phương trình:

$$\begin{cases} x^2 - a^2 & = 0 \\ z & = 0 \end{cases} \tag{3.12}$$

Quay cặp đường thẳng này một vòng xung quanh trục Oy, ta được một *mặt trụ tròn xoay*. Phương trình của mặt này là:

$$x^2 + z^2 = a^2 \tag{3.13}$$

③ **Cặp mặt phẳng song song, cặp mặt phẳng trùng nhau.**
Các phương trình sau:

$$x^2 = a^2 \quad ; \quad y^2 = b^2 \quad , \quad z^2 = c^2$$

biểu diễn cặp mặt phẳng song song nếu $a \neq 0$; $b \neq 0$; $c \neq 0$ và biễu diễn các cặp mặt phẳng trùng nhau nếu

$$a = 0 \ ; \ b = 0 \ ; \ c = 0.$$

3.3 Mặt bậc hai.

3.3.1 Phép co về mặt phẳng (Oxy) với hệ số k.

Giả sử $M(x;y;z)$ là một điểm tùy ý trong không gian $Oxyz$. Phép biến hình biến điểm $MP(x;y;z)$ thành điểm $M'(X;Y;Z)$ sao cho

$$\begin{cases} X &= x \\ Y &= y \\ Z &= kz \end{cases}$$

được gọi là *phép co về mặt phẳng Oxy với hệ số k*.

2. Mặt êlipxoit.

Cho một êlipxoit tròn xoay:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \tag{3.14}$$

thực hiện phép co mọi điểm của êlipxoit tròn xoay nói trên về mặt phẳng Oxy với hệ số co $k = \frac{c}{b}$ ta được một mặt gọi là *mặt êlipxoit*.
Phép co nói trên cho ta:

$$\begin{cases} X &= x \\ Y &= y \\ Z &= kz \end{cases}$$

$$\begin{cases} X &= x \\ Y &= y \\ Z &= \frac{c}{b}z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x &= X \\ y &= Y \\ z &= \frac{b}{c}Z \end{cases}$$

thay vào phương trình (3.14) ta được:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1 \tag{3.15}$$

Phương trình (3.15) được gọi là *phương trình chính tắc của êlipxoit*.

3.3.2 Mặt hyperboloit.

Tương tự như trên, với phép co thích hợp các hyperboloit tròn xoay một tầng, hai tầng ta được các *hyperboloit hai tầng, một tầng*.

Phương trình chính tắc của một hyperboloit hai tầng là:

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1 \tag{3.16}$$

Phương trình chính tắc của một hyperboloit một tầng là:

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1 \tag{3.17}$$

3.3.3 Mặt paraboloit.

① **Mặt paraboloit eliptic.** Cho một paraboloit tròn xoay:

$$y^2 + z^2 = 2px$$

Với $p > 0$ ta đặt $p = a^2$ phương trình trên được viết:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 2x \tag{3.18}$$

Thực hiện phép co về mặt phẳng Oxy với hệ số co $k = \dfrac{b}{a}$:

$$\begin{cases} X & = x \\ Y & = y \\ Z & = \dfrac{b}{a}z \end{cases}$$

thay vào phương trình (3.18) ta được một mặt gọi là *paraboloit eliptic* với phương trình chính tắc:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 2X \tag{3.19}$$

Nếu cắt paraboloit eliptic bằng một mặt phẳng vuông góc với trục Ox có phương trình $x = \alpha$ ta có thiết diện tạo thành là một elip:

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{m^2} + \dfrac{z^2}{n^2} &= 1 \\ x &= \alpha \end{cases}$$

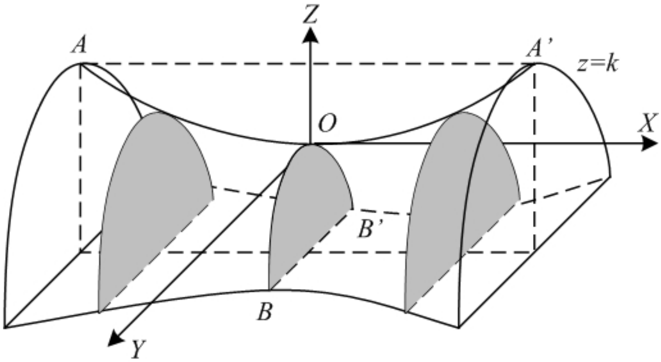
(2) **Mặt paraboloit hyperbolic.** Ta xét hai parabol (I) (AOA') và (II) (BOB') cùng có đỉnh ở gốc O cùng nhận trục OZ làm trục đối xứng *(xem hình vẽ ở dưới)*, với phương trình của chúng là:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} X^2 &= 2a^2Z \\ Y &= 0 \end{cases} \quad ; \quad \text{(II)} \quad \begin{cases} Y^2 &= -2b^2Z \\ X &= 0 \end{cases}$$

Ta giữ parabol (I) cố định và tịnh tiến parabol (II) sao cho đỉnh của (II) chạy trên parabol (I), mặt phẳng chứa parabol (II) luôn luôn song song với mặt phẳng YOZ và trục của parabol (II) luôn luôn song song với trục OZ. Người ta chứng minh được mặt tạo thành có phương trình:

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 2Z \tag{3.20}$$

Phương trình (3.20) gọi là *phương trình chính tắc của mặt paraboloit hyperbolic*. Mặt paraboloit hyperbolic còn gọi là *mặt yên ngựa*.



3.3.4 Mặt nón bậc hai.

Dùng phép co thích hợp thì một mặt nón tròn xoay trở thành một mặt nón bậc hai mà phương chính tắc là:

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 0 \tag{3.21}$$

hay:

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 0 \tag{3.22}$$

3.3.5 Mặt trụ bậc hai.

Xét mặt trụ tròn xoay (3.13):

$$x^2 + z^2 = a^2$$

Thực hiện phép co về mặt phẳng Oxy:

$$\begin{cases} X & = x \\ Y & = y \\ Z & = \dfrac{c}{a} z \end{cases}$$

Thay vào phương trình (3.13) ta có *mặt trụ eliptic*:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \tag{3.23}$$

Cắt mặt trụ eliptic bằng một mặt phẳng song song với mặt phẳng (Oxz) ta được thiết diện là một elip:

$$\begin{cases} \dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} & = 1 \\ Z & = k \end{cases}$$

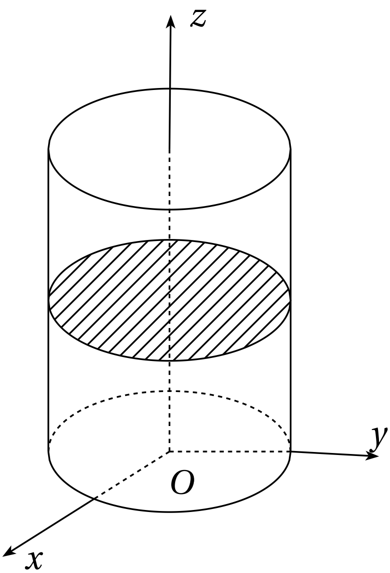
Mặt trụ eliptic (3.23) còn có thể tạo nên bằng cách khác như sau:

Trong mặt phẳng tọa độ (Oxz) ta lấy elip có phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} & = 1 \\ \quad y & = 0 \end{cases} \tag{3.24}$$

và một đường thẳng ℓ di động sao cho luôn luôn song song với trục Oy và dựa trên elip (3.24). Đường thẳng ℓ như thế sẽ vẽ ra mặt trụ eliptic (3.23).

Phương trình (3.24) gọi là *đường chuẩn* của mặt trụ và mọi đường thẳng hoàn toàn nằm trên mặt trụ (như đuường thẳng ℓ) gọi là *đường sinh thẳng của mặt trụ.*

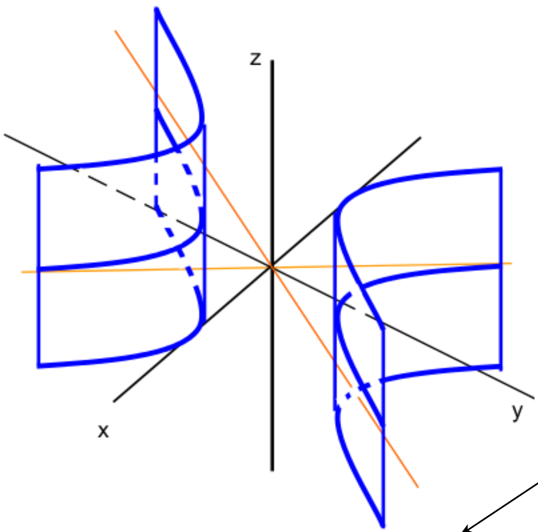


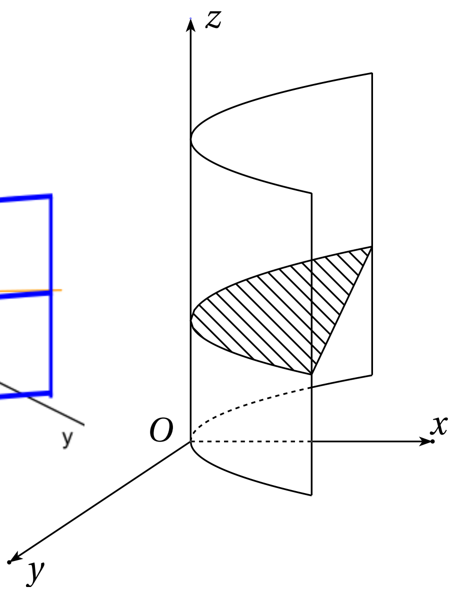
Tương tự nếu ta lấy đường chuẩn là hyperbol, parabol và họ đường sinh thẳng vuông góc với mặt phẳng chứa đường chuẩn thì ta được *mặt trụ hyperbolic, parabolic.*
Phương trình chính tắc của mặt trụ parabolic có dạng:

$$Y^2 = 2pX \tag{3.25}$$

Phương trình chính tắc của mặt trụ hyperbolic có dạng:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{3.26}$$





Ngoài ra cũng có thể xem cặp mặt phẳng cắt nhau, song song hay trùng nhau là những mặt trụ bậc hai có đường chuẩn là cặp mặt phẳng cắt nhau, song song hay trùng nhau.

Tóm lại ta có các mặt bậc hai sau đây:

1. êlipxoit (mặt cầu là một êlipxoit đặc biệt)
2. hyperboloit hai tầng
3. hyperboloit một tầng
4. paraboloit eliptic
5. paraboloit hyperbolic (mặt yên ngựa)
6. mặt nón bậc hai
7. mặt trụ eliptic
8. mặt trụ hyperbolic
9. mặt trụ parabolic
10. cặp mặt phẳng cắt nhau,
11. cặp mặt phẳng song song
12. cặp mặt phẳng trùng nhau

3.4 Mặt kẻ bậc hai và đường sinh thẳng.

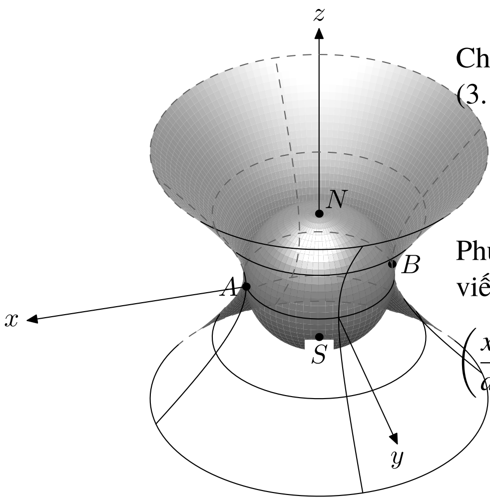
Định nghĩa 3.4.1 Một mặt sẽ được gọi là mặt kẻ nếu qua bất kỳ điểm nào của nó luôn có ít nhất một đường thẳng nằm hoàn toàn trên mặt ấy.

Như vậy mặt kẻ là mặt tạo nên bởi một tập hợp đường thẳng. Mỗi đường thẳng của tập hợp ấy gọi là một *đường sinh thẳng* của mặt kẻ.

Từ định nghĩa ta thấy ngay mặt nón bậc hai, các mặt trụ và các cặp mặt phẳng là các mặt kẻ bậc hai.

Ngoài ra người ta còn thấy mặt hyperboloit một tầng và mặt yên ngựa là những mặt kẻ bậc hai.

3.4.1 Đường sinh thẳng của mặt hyperboloit một tầng.



Cho một hyperboloit một tầng (3.17):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Phương trình (3.17) có thể được viết:

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = \left(1 + \frac{z}{c}\right)\left(1 - \frac{z}{c}\right)$$

Xét hai họ đường thẳng:

$$\ell \begin{cases} p\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right) & = q\left(1+\dfrac{z}{c}\right) \\ \\ q\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right) & = p\left(1-\dfrac{z}{c}\right) \end{cases} \tag{3.27}$$

và

$$\ell' \begin{cases} p'\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right) & = q'\left(1-\dfrac{z}{c}\right) \\ \\ q'\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right) & = p'\left(1+\dfrac{z}{c}\right) \end{cases} \tag{3.28}$$

trong đó các cặp số thực p,q và p',q' không đồng thời bằng 0.

Ta thấy các họ đường thẳng ℓ và ℓ' hoàn toàn nằm trên mặt hyperboloit một tầng. Nếu cho các tham số p,q và p',q' lấy mọi giá trị có thể được thì ta nhận được tất cả đường sinh thẳng của mặt hyperboloit một tầng cho bởi (3.27) và (3.28).

Một hình ảnh của mặt hyperboloit một tầng ở trang 94 tháp cảng Kobe (Nhật bản) cao 108 mét.

■ **Ví dụ 3.1** Tìm đường sinh thẳng của hyperboloit một tầng

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{1}=1$$

đi qua điểm $M(3;2;1)$. ■

Giải: Ta thấy điểm M nằm trên mặt hyperboloit một tầng đã cho. Phương trình của hai họ đường sinh thẳng của mặt là:

$$\ell \begin{cases} p\left(\frac{x}{3}+\frac{z}{1}\right) & = q\left(1+\frac{y}{2}\right) \\ q\left(\frac{x}{3}-\frac{z}{1}\right) & = p\left(1-\frac{y}{2}\right) \end{cases}$$

và

$$\ell' \begin{cases} p'\left(\frac{x}{3}+\frac{z}{1}\right) & = q'\left(1-\frac{y}{2}\right) \\ q'\left(\frac{x}{3}-\frac{z}{1}\right) & = p'\left(1+\frac{y}{2}\right) \end{cases}$$

Vì $M \in \ell$ nên tọa độ điểm M thỏa mãn phương trình của ℓ, suy ra $p = q$. Vì $M \in \ell'$ nên tọa độ điểm M thỏa mãn phương trình của ℓ', suy ra $p' = 0$.

1. Nếu $p = q$, chọn $p = q = 6$ ta được đường sinh thẳng thuộc họ thứ nhất là:
$$\begin{cases} 2x-3y+6z-6 & = 0 \\ 2x+3y-6z-6 & = 0 \end{cases}$$

2. Nếu $p'0 \to q' \neq 0$, chọn $q' = 1$ ta được đường sinh thẳng thuộc họ thứ hai là:
$$\begin{cases} y-2 & = 0 \\ x-3z & = 0 \end{cases}$$

3.4.2 Tính chất của các đường sinh thẳng của mặt hyperboloit một tầng.

Cho một hyperboloit một tầng:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{3.29}$$

cắt hyperboloit bởi mặt phẳng tọa độ Oxy ta được một elip, gọi là *elip thắt*.

Định lý 3.4.1 Hai đường sinh thẳng của một hyperboloit một tầng thuộc hai họ khác nhau thì luôn luôn nằm trên cùng một mặt phẳng. Chúng song song với nhau khi và chỉ khi chúng đi qua hai điểm đối tâm của elip thắt.

Chứng minh.
Xét hai họ đường sinh thẳng của hyperboloit một tầng (3.29):

$$\ell \begin{cases} p\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right) & = q\left(1+\frac{y}{b}\right) \\ q\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right) & = p\left(1-\frac{y}{b}\right) \end{cases}$$

và

$$\ell' \begin{cases} p'\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right) & = q'\left(1-\frac{y}{b}\right) \\ q'\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right) & = p'\left(1+\frac{y}{b}\right) \end{cases}$$

Để cho gọn ta đặt:

$$\frac{x}{a} = X \ ; \ \frac{y}{b} = Y \ ; \ \frac{z}{c} = Z$$

Như vậy:

$$\ell \begin{cases} pX - qY + pZ - q & = 0 \\ qX + pY - pZ - p & = 0 \end{cases}$$

và

$$\ell' \begin{cases} p'X + q'Y + p'Z - q' & = 0 \\ q'X - p'Y - q'Z - p' & = 0 \end{cases}$$

Vì p và q không đồng thời bằng 0 nên ta có thể giả sử $p^2 + q^2 = 1$. Tương tự ta có thể giả sử $p'^2 + q'^2 = 1$.

Khi đó vectơ chỉ phương của ℓ là $\overrightarrow{a} = (q^2 - p^2; 2pq; 1)$, vectơ chỉ phương của ℓ' là $\overrightarrow{a'} = (q'^2 - p'^2; -2p'q'; 1)$. Ta lấy trên ℓ điểm $A(2pq; p^2 - q^2; 0)$ và trên ℓ' điểm $B(2p'q'; q'^2 - p'^2; 0)$. Từ đó

$$\overrightarrow{AB} = (2p'q' - 2pq; q'^2 - p'^2 + q^2 - p^2; 0)$$

Xét định thức:

$$\begin{vmatrix} q^2 - p^2 & 2pq & 1 \\ q'^2 - p'^2 & -2p'q' & 1 \\ 2p'q' - 2pq & q'^2 - p'^2 + q^2 - p^2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} q'^2 - p'^2 - (q^2 - p^2) & -2(p'q' + pq) \\ 2(p'q' - pq) & q'^2 - p'^2 + (q^2 - p^2) \end{vmatrix}$$

$$= (q'^2 - p'^2)^2 - (q^2 - p^2)^2 + 4(p'q')^2 - 4(pq)^2$$

$$= (p'^2 + q'^2)^2 - (p^2 + q^2)^2 = 0.$$

Vậy ℓ và ℓ' cùng nằm trong một mặt phẳng.

ℓ và ℓ' song song khi và chỉ khi $\ell \neq \ell'$ và $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ cùng phương. Điều này tương đương với $A \neq B$ và $pq + p'q' = 0$ và $q^2 - p^2 + q'^2 - p'^2 = 0$, hay tương đương với A và B là hai điểm xuyên tâm đối của elip thắt.

Ta đã chứng minh xong định lý.

Định lý 3.4.2 Hai đường sinh thẳng của một hyperboloit một tầng thuộc cùng một họ thì chéo nhau.

Chứng minh.

Ta lấy hai đường sinh thẳng phân biệt của hyperboloit một tầng (3.29) từ cùng một họ:

$$\ell_1 \begin{cases} p_1\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right) & = q_1\left(1+\dfrac{y}{b}\right) \\ \\ q_1\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right) & = p_1\left(1-\dfrac{y}{b}\right) \end{cases}$$

và

$$\ell_2 \begin{cases} p_2\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right) & = q_2\left(1+\dfrac{y}{b}\right) \\ \\ q_2\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right) & = p_2\left(1-\dfrac{y}{b}\right) \end{cases}$$

Để cho gọn ta đặt:

$$\frac{x}{a} = X \; ; \; \frac{y}{b} = Y \; ; \; \frac{z}{c} = Z$$

Như vậy:

$$\ell_1 \begin{cases} p_1X - q_1Y + p_1Z - q_1 & = 0 \\ q_1X + p_1Y - p_1Z - p_1 & = 0 \end{cases}$$

và

$$\ell_2 \begin{cases} p_2X - q_2Y + p_2Z - q_2 & = 0 \\ q_2X + p_2Y - p_2Z - p_2 & = 0 \end{cases}$$

Vì p_i và q_i $(i = 1,2)$ không đồng thời bằng 0 nên ta có thể giả sử $p_i^2 + q_i^2 = 1$.

Khi đó vectơ chỉ phương của ℓ_i là $\overrightarrow{a_i} = (q_i^2 - p_i^2; 2p_iq_i; 1)$. Ta lấy trên ℓ_i điểm $A_i(2p_iq_i; p_i^2 - q_i^2; 0)$. Từ đó

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \Big(2(p_2q_2 - p_1q_1); p_2^2 - q_2^2 + q_1^2 - p_1^2; 0\Big)$$

Xét định thức:

$$\begin{vmatrix} q_1^2 - p_1^2 & 2p_1q_1 & 1 \\ q_2^2 - p_2^2 & 2p_2q_2 & 1 \\ 2(p_2q_2 - p_1q_1) & p_2^2 - q_2^2 + q_1^2 - p_1^2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} q_2^2 - p_2^2 - (q_1^2 - p_1^2) & 2(p_2q_2 - p_1q_1) \\ 2(p_2q_2 - p_1q_1) & p_2^2 - q_2^2 + (q_1^2 - p_1^2) \end{vmatrix}$$

$$= -\left(q_2^2 - p_2^2 + p_1^2 - q_1^2)^2\right) - 4(p_2q_2 - p_1q_1)^2 \leqslant 0$$

Xảy ra dấu bằng khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} q_2^2 - p_2^2 + p_1^2 - q_1^2 & = 0 \\ p_2q_2 - p_1q_1 & = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} q_2^2 - q_1^2 & = 0 \\ p_2q_2 - p_1q_1 & = 0 \end{cases}$$

Lưu ý: $p_1^2 + q_1^2 = 1$; $p_2^2 + q_2^2 = 1$

1 Nếu $q_2 = 0 \Rightarrow q_1 = 0$.

2 Nếu $q_2 = q_1 \neq 0$ thì $p_2 = p_1$.

3 Nếu $q_2 = -q_1 \neq 0$ thì $p_2 = -p_1$.

cả ba trường hợp đều suy ra $\ell_1 \equiv \ell_2$. Trái giả thiết.

Vậy ℓ và ℓ' chéo nhau.

3.4.3 Tính chất của các đường sinh thẳng của mặt paraboloit hyperbolic.

Cho một mặt paraboit hyperbolic:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 2x \qquad (3.30)$$

Định lý 3.4.3 Hai đường sinh thẳng của một paraboloit hyperbolic thuộc hai họ khác nhau thì luôn luôn cắt nhau.

Chứng minh.
Xét hai họ đường sinh thẳng của paraboloit hyperbolic (3.30):

$$\ell \begin{cases} p\left(\dfrac{y}{a}+\dfrac{z}{b}\right) & = qx \\ q\left(\dfrac{y}{a}-\dfrac{z}{b}\right) & = 2p \end{cases} \quad \text{và} \quad \ell' \begin{cases} p'\left(\dfrac{y}{a}+\dfrac{z}{b}\right) & = 2q' \\ q'\left(\dfrac{y}{a}-\dfrac{z}{b}\right) & = p'x \end{cases}$$

Ở đây ta cso thể giả sử $p' \neq 0$ và $q \neq 0$. Đặt:

$$x = X \; ; \; \frac{y}{a} = Y \; ; \; \frac{z}{b} = Z$$

Như vậy:

$$\ell \begin{cases} qX - pY - pZ & = 0 \\ qY - qZ - 2p & = 0 \end{cases}$$

và

$$\ell' \begin{cases} p'Y + p'Z - 2q' & = 0 \\ p'X - q'Y + q'Z & = 0 \end{cases}$$

Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} qY - qZ - 2p & = 0 \quad (1) \\ p'Y + p'Z - 2q' & = 0 \quad (2) \\ qX - pY - pZ & = 0 \quad (3) \\ p'X - q'Y + q'Z & = 0 \quad (4) \end{cases}$$

Ta có nhận xét hệ phương trình (1), (2), (3) có nghiệm duy nhất là:

$$\begin{cases} X & = \dfrac{2pq'}{p'q} \\ Y & = \dfrac{pp' + qq'}{p'q} \\ Z & = \dfrac{pp' - qq'}{p'q} \end{cases}$$

Thay vào (4) ta có:

$$\begin{aligned} p'X - q'Y + q'Z &= 2\frac{q'p}{q} - \frac{q'(p'p + q'q)}{qp'} - \frac{q'(-q'q + p'p)}{qp'} \\ &= \frac{2pp'q' - pp'q' - qq'^2 + qq'^2 - pp'q'}{p'q} = 0 \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất, nghĩa là ℓ và ℓ' cắt nhau. Ta đã chứng minh xong định lý.

Định lý 3.4.4 Hai đường sinh thẳng của một paraboloit hyperbolic thuộc cùng một họ thì chéo nhau.

Chứng minh.
Ta lấy hai đường sinh thẳng phân biệt của paraboloit hyperbolic (3.30) từ cùng một họ:

$$\ell_1 \begin{cases} p_1\left(\dfrac{y}{a} + \dfrac{z}{b}\right) &= q_1 x \\ q_1\left(\dfrac{y}{a} - \dfrac{z}{b}\right) &= 2p_1 \end{cases} \quad \text{và} \quad \ell_2 \begin{cases} p_2\left(\dfrac{y}{a} + \dfrac{z}{b}\right) &= q_2 x \\ q_2\left(\dfrac{y}{a} - \dfrac{z}{b}\right) &= 2p_2 \end{cases}$$

Để cho gọn ta đặt:

$$x = X \; ; \; \frac{y}{a} = Y \; ; \; \frac{z}{b} = Z$$

Như vậy:

$$\ell_1 \begin{cases} q_1 X - p_1 Y - p_1 Z &= 0 \\ q_1 Y - q_1 Z - 2p_1 &= 0 \end{cases}$$

và

$$\ell_2 \begin{cases} q_2 X - p_2 Y - p_2 Z &= 0 \\ q_2 Y - q_2 Z - 2p_2 &= 0 \end{cases}$$

Khi đó vectơ chỉ phương của ℓ_i là $\overrightarrow{a_i} = (2P_i; 1; 1)$, với $P_i = \dfrac{p_i}{q_i}$. Ta lấy trên ℓ_i điểm $A_i\left(P_i^2; 0; -2P_i\right)$. Từ đó

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \left(-2\left(P_1^2 - P_2^2\right); 0; -2b\left(P_1 - P_2\right)\right)$$

Vectơ này cùng phương với vectơ $\overrightarrow{b} = (P_1 + P_2; 0; b)$.

Xét định thức:

$$D = \begin{vmatrix} 2P_1 & 1 & 1 \\ 2P_2 & 1 & 1 \\ P_1 + P_2 & 0 & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2P_1 & 1 & 1 \\ 2P_2 - 2P_1 & 0 & 0 \\ P_1 + P_2 & 0 & b \end{vmatrix} = 2b(P_1 - P_2).$$

Nếu $P_1 = P_2$ thì $\ell_1 \equiv \ell_2$, do đó $D \neq 0$.
Vậy ℓ và ℓ' chéo nhau là điều phải chứng minh.

Tháp cảng Kobe là một công trình kiến trúc theo mô hình của một hyperboloid một tầng. Tháp cao 108 mét và có một đài quan sát ở độ cao 90,28 mét trong thành phố cảng Kobe, Nhật Bản. Tháp với màu thép đỏ cung cấp một cái nhìn ngoạn mục ra vùng vịnh và các khu vực xung quanh. Việc xây dựng tháp được hoàn thành vào năm 1963 và rất giống với tháp Canton ở Quảng Châu, Trung Quốc.


KOBE
89.9

BÀI TẬP

Bài tập 3.1 Lập phương trình mặt tròn xoay do đường thẳng

$$d:\begin{cases} x &= 1+2t \\ y &= -3+3t \\ z &= t \end{cases}$$

quay một vòng xung quanh trục Oz tạo nên. ■

Bài tập 3.2 Lập phương trình của mặt trụ tròn xoay biết rằng trục của nó có phương trình:

$$d:\begin{cases} x &= t \\ y &= 1+2t \\ z &= -3-2t \end{cases}$$

và điểm $M(1;-2;1)$ nằm trên mặt trụ ấy. ■

Bài tập 3.3 Viết phương trình của paraboloit hyperbolic qua hai đường thẳng

$$\begin{cases} y &= \pm x \\ z &= 0 \end{cases}$$

và qua điểm $A(1;2;3)$ biết rằng Oz là trục đối xứng. ■

Bài tập 3.4 Tìm đường sinh thẳng của mặt yên ngựa

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=z$$

biết nó song song với mặt phẳng $3x+2y-4z=0$. ■

Bài tập 3.5 Tìm đường sinh thẳng của mặt yên ngựa

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=2z$$

biết nó đi qua điểm $A(8;3\sqrt{2};1)$. ■

Bài tập 3.6 Cho mặt yên ngựa

$$x^2-y^2=2z.$$

Tìm quỹ tích những giao điểm của những cặp đường sinh thẳng vuông góc với nhau. ■

Bài tập 3.7 Cho mặt yên ngựa

$$(S):\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z \quad (a\neq b).$$

Tìm quỹ tích giao điểm của những cặp đường sinh thẳng của (S) vuông góc với nhau. ■

Bài tập 3.8 Chứng minh rằng hình chiếu vuông góc của các đường sinh thẳng của mặt yên ngựa

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$

trên mặt phẳng (Oxy) tiếp xúc với parabol:

$$\begin{cases} x^2 & = 2a^2 z \\ y & = 0 \end{cases}$$

■

Bài tập 3.9 Viết phương trình elipxoit có trục trùng với trục toạ độ, biết rằng nó đi qua điểm $A(3;1;1)$ và đi qua đường tròn có phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 & = 9 \\ z & = x \end{cases}$$

■

Bài tập 3.10 Tìm giao tuyến của mặt phẳng $x = 9$ và mặt hyperboloit $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{8} - \dfrac{z^2}{2} = 1.$ ■

Bài tập 3.11 Tìm đường thẳng đi qua điểm $A(1;1;1)$ và nằm trên hyperboloit một tầng: $x^2 + y^2 - z^2 = 1.$ ■

Bài tập 3.12 Tìm đường sinh thẳng của hyperboloit một tầng $x^2 + y^2 = 2(z^2 + 1)$ đi qua điểm $A(1;1;0)$. ■

Bài tập 3.13 Cho một hyperboloit một tầng: $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} - z^2 = 1$ và mặt phẳng $2x + 3y - 6z - 6 = 0$. Chứng minh rằng giao của hyperboloit và mặt phẳng là một cặp đường thẳng. ■

Bài tập 3.14 Lập phương trình êlipxoit biết rằng nó nhận các trục toạ độ làm trục đối xứng và nó cắt các mặt (Oxz) và (Oyz) theo các đường:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{z^2}{16} & = 1 \\ y & = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{16} & = 1 \\ x & = 0 \end{cases}$$

■

Bài tập 3.15 Lập phương trình êlipsoit qua $M(1;2;\sqrt{23})$ và cắt mặt phẳng (Oxy) theo đường (C): $\begin{cases} \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16} & = 1 \\ z & = 0 \end{cases}$ ■

Bài tập 3.16 Chứng minh rằng tất cả các elip được tạo nên bởi giao của elipxoit:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

với các mặt phẳng $x=k=$ const đều có cùng tâm sai. ■

Bài tập 3.17 Xác định một mặt bậc hai do một đường thẳng d chuyển động tạo nên biết rằng nó luôn tựa lên ba đường thẳng:

$$d_1:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z}{-1}\ ;\ d_2:\frac{x-2}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}\ ;\ d_3:\frac{x}{2}=\frac{y+1}{0}=\frac{z}{1}$$

Hướng dẫn:
Đường thẳng d có thể được xem như xác định bởi một điểm $M_0(2t;1;-t)$ trên d_1 và cắt hai đường thẳng $d_2;d_3$. Gọi $M(x;y;z)$ là một điểm tùy ý

trên d. Do d và d_i $(i = 1,2)$ cắt nhau ta có:

$$\begin{vmatrix} x-2t & y-1 & z+t \\ 2t-2 & 1 & -t \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{và} \quad \begin{vmatrix} x-2t & y-1 & z+t \\ 2t & 2 & -t \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Khai triển các định thức, ta có:

$x+2y-2z-2+t(x-2y+2z-2) = 0$ và $x-2z-2t(y+1) = 0$

Khử t giữa hai phương trình ta được: $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} - \dfrac{z^2}{1} = 1$ ■

Bài tập 3.18 Tìm đường sinh thẳng của mặt

a) $(S): y^2 + 3xy + 2yz - zx + 3x + 2y = 0$ và đi qua gốc tọa độ.

b) $(S): x^2 + y^2 + 5z^2 - 3xy + 2yz - 2zx - 9 = 0$ và song song với đường thẳng: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z}{-1}$.

■

Bài tập 3.19 Một mặt phẳng song song với mặt phẳng $x+y-z=0$ cắt mặt hyperboloit một tầng $x^2+y^2-z^2 = 1$ theo hai đường sinh thẳng. Tìm giao điểm của hai đường sinh thẳng này và tính góc tạo bởi chúng. ■

Bài tập 3.20 Chứng minh rằng mặt phẳng $2x-2y-z+16=0$ giao với paraboloit hyperbolic $x^2-4y^2 = 2z$ theo các đường sinh thẳng. Viết phương trình của các đường sinh thẳng này. ■

Bài tập 3.21 Tìm đường sinh thẳng của mặt $(S): \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = z$ biết rằng nó song song với mặt phẳng $(P): 3x+2y-4z=0$. ■

Bài tập 3.22 Cho mặt hyperboloit một tầng $(S): \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{z^2}{9}=1$ và điểm $A(5;-4;3)$

a) Viết phương trình các đường sinh thẳng của (S) đi qua điểm A.

b) Viết phương trình các đường sinh thẳng của (S) song song với các đường sinh thẳng ở câu trên.

Tài liệu tham khảo

[1] Lê Khắc Bảo. *Hình học Giải tích.* Nhà Xuất bản giáo dục 1982.

[2] Izu Vaizman. *Analytical Geometry.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. (Singapore) 1997.

[3] Петр Сергейевич Моденов, Алексей Серапионович Пархоменко. *Сборник задач по аналитической геометрии*. Издательство “Наука” 1976. (Tiếng Nga).

[4] Давид Викторович Клетеник. *Сборник задач по аналитической геометрии*. Издательство «Наука» 1980.

CÙNG TÁC GIẢ

Do Nhà Xuất bản Đại học Sư Phạm TP Hồ Chí Minh
ấn hành

ĐÃ PHÁT HÀNH

1. LaTeX - Sắp chữ, Vẽ hình và Đại số máy tính.
2. Ôn luyện thi Đại học Môn Toán - Khảo sát hàm số và Tích phân.
3. Ôn luyện thi Đại học Môn Toán - Mười đề Ôn luyện thi Đại học.
4. Ubuntu Linux-dễ học dễ thực hành.
5. Giải toán Toán-Lý-Hoá-Sinh với máy tính VINACAL 570 ES Plus.
6. Giải toán Toán-Lý-Hoá-Sinh với máy tính CASIO FX 570 VN Plus.
7. Hình học giải tích và Đại số máy tính.

SẮP PHÁT HÀNH

1. Ôn luyện thi Đại học Môn Toán - Đại số và Lượng giác.
2. Ôn luyện thi Đại học Môn Toán - Hình học không gian.